EDO-Session Viernes 2026-11-13

Separación de variables: la ecuación del calor y el problema de Sturm–Liouville

Planteamiento: la ecuación del calor

La ecuación del calor es

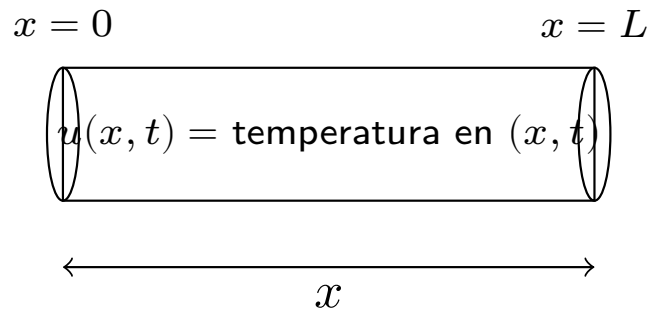
$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

abreviada a menudo a $u_t - c^2 u_{xx} = 0$. Podemos pensar en una barra metálica de longitud L, como en la figura. La función $u(x,t)$ describe la temperatura en cada punto x de la barra en cada instante t. El parámetro c es una propiedad térmica del material de la barra.

Imponemos además estas condiciones a la función $u(x,t)$:

(A)
Condiciones de **contorno**
(sin pérdida de generalidad)

$$u(0,t) = 0$$
$$u(L,t) = 0$$



(B)
Temperatura **inicial** (t = 0) de la barra

$$u(x,0) = f(x)$$

Método de separación de variables

Buscamos $u(x,t) = T(t)X(x) \;\Rightarrow\; u_t = T'X, \quad u_{xx} = TX''$

Así que $T'X - c^2TX'' = 0 \implies \dfrac{1}{c^2}\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$

Para que una función que sólo depende de x sea igual a una que sólo depende de t, ambas tienen que ser constantes. Sea esa constante $= -\lambda$.

Tenemos entonces **dos problemas**:

(1) Un problema de **valores iniciales**

$$\begin{cases} T' + c^2\lambda T = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

que veremos después de...

(2) Un problema de **contorno**

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

Este segundo tipo de problemas es **nuevo en el curso** y requiere ideas nuevas. Ese es el contenido del Tema 5.

Dos ejemplos muy distintos

Primer ejemplo: $\lambda = 2,\ L = 2\pi$

$$\begin{cases} X'' + 2X = 0 \\ \textbf{CC: } X(0) = 0,\ X(2\pi) = 0 \end{cases} \implies r^2 + 2 = 0 \implies X = c_1 \cos(\sqrt{2}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{2}\, x)$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \implies c_2 \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi) = 0 \implies c_2 = 0$$

Por tanto **sólo existe la solución trivial,** que no sirve para separación de variables.

Segundo ejemplo: $\lambda = 4,\ L = 2\pi$

$$\begin{cases} X'' + 4X = 0 \\ \textbf{CC: } X(0) = 0,\ X(2\pi) = 0 \end{cases} \implies r^2 + 4 = 0 \implies X = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \implies c_2 \sin(4\pi) = 0 \implies \text{vale cualquier } c_2$$

Por tanto **existe una solución no trivial** (en realidad infinitas), $\sin 2x$

¿Qué hace a $\lambda = 4$ distinto de $\lambda = 2$? ¿Qué pasa con otros λ?

Empezamos con $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi) = 0 \end{cases}$ (CC) Condiciones de contorno

Ahora en vez de $X(x)$) usamos $y(x)$, como hemos hecho en otros capítulos.

El polinomio característico es $r^2 + \lambda = 0$.

(1) Si $\lambda = 0 \Rightarrow r = 0$ doble $\Rightarrow y = c_1 + c_2 x \Rightarrow$ las c.c. dan $c_2 = 0,\ c_1 = 0$ (sol. trivial, no sirve)

(2) Si $\lambda < 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda > 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{-\lambda},\ r_2 = -\sqrt{-\lambda}$ reales distintas $\Rightarrow$ no cumplen las c.c. (sol. trivial)

(3) Si $\lambda > 0,\ \lambda = k^2 \Rightarrow r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ki \Rightarrow y = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)$ (con $k > 0$) Y entonces las condiciones de contorno dan:

$$0 = c_1, \qquad c_2 \sin(2\pi k) = 0 \implies 2\pi k = n\pi \implies k = \frac{n}{2} \text{ con } n = 1, 2, 3, ...$$

Conclusión: sólo hay soluciones no triviales para

$\lambda = \frac{n^2}{4}$ $n = 1, 2, 3, ...$ y esas soluciones son (salvo mult. por constante) $y_n(x) = \sin(\frac{n}{2}x)$

Construcción de las soluciones $u_n(x,t)$

Volvemos a $u(x,t) = T(t)X(x)$. Hemos obtenido

$$X(x) = \sin\left(\tfrac{n}{2}x\right) \quad \text{pero sólo cuando } \lambda = \tfrac{n^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Así que ahora, para $T(t)$:

$$T'(t) + c^2 \tfrac{n^2}{4} T = 0 \implies T(t) = A \cdot e^{-c^2 \frac{n^2}{4} t}$$

Tenemos así una familia de soluciones:

$$u_n(x,t) = A \cdot e^{-c^2 \frac{n^2}{4} t} \cdot \sin\left(\tfrac{n}{2}x\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Y nos falta que sea $u(x,0) = f(x)$. Como $u(x,0) = A\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$:

- Si $f(x) = 3\sin\left(\frac{5}{2}x\right)$ ya está.
- Y si $f(x) = 3\sin\left(\frac{5}{2}x\right) - 4\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$ también.

¿Pero y si $f(x) = x(2\pi - x)$*?*

Desarrollo en serie y solución general

La idea es aplicar el *principio de superposición*. Primero, convirtiendo primero f en una suma infinita (una *serie*):

$$f(x) = x(2\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\tfrac{n}{2}x)$$

(¿Cuáles serán los A_n?) Y ahora proponemos, usando superposición:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, e^{-c^2 \frac{n^2}{4} t} \sin(\tfrac{n}{2}x)$$

Sería

$$u(x,0) = f(x)$$

y además

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$$

Finalmente, por linealidad $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ porque cada sumando de la serie lo cumple.

Las preguntas del tema 5 son: ¿cuáles son los λ, y_n?, ¿Cómo calculo los A_n?

El conjunto de autofunciones normalizadas $\left\{\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ forma una **base ortonormal completa** en $L^2([0, 2\pi])$ (correspondiente al desarrollo en serie de Fourier de senos de medio rango en $[0, L]$ con $L = 2\pi$).

Por tanto, cualquier función $f \in L^2([0, 2\pi])$ se desarrolla en esta base como:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

donde los coeficientes de Fourier generalizados vienen dados por el producto escalar estándar en $L^2([0, 2\pi])$:

$$c_n = \langle f, \phi_n \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Cálculo de los coeficientes c_n

Sustituyendo $f(x) = x(2\pi - x)$ y $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)$:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} (2\pi x - x^2) \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \mathrm{d}x$$

Integramos por partes sucesivamente:

1. **Primera integración por partes** $(u = 2\pi x - x^2,\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\mathrm{d}x)$:

$$\int_0^{2\pi} (2\pi x - x^2) \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \mathrm{d}x =$$

$$\underbrace{\left[-\frac{2}{n}(2\pi x - x^2)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_0^{2\pi}}_{0} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} (2\pi - 2x)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\mathrm{d}x$$

2. **Segunda integración por partes** ($u_2 = 2\pi - 2x,\ \mathrm{d}v_2 = \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\mathrm{d}x$):

$$\frac{2}{n}\left(\underbrace{\left[\frac{2}{n}(2\pi - 2x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_0^{2\pi}}_{0} + \frac{4}{n}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\mathrm{d}x\right)$$

3. **Evaluación de la integral restante:**

$$\frac{8}{n^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{n^2}\left[-\frac{2}{n}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$-\frac{16}{n^3}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right) = \frac{16(1-(-1)^n)}{n^3}$$

Multiplicando por el factor $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$:

$$c_n = \frac{16(1-(-1)^n)}{\sqrt{\pi}\,n^3}$$

2. Simplificación según la paridad de n

- **Si n es par ($n = 2k$):** $1 - (-1)^{2k} = 0 \implies c_{2k} = 0$ (esto ocurre porque $f(x)$ es simétrica respecto al punto medio $x = \pi$, mientras que las autofunciones pares son antisimétricas respecto a dicho punto).
- **Si n es impar ($n = 2k - 1$, con $k \geq 1$):**
  $1 - (-1)^{2k-1} = 2 \implies c_{2k-1} = \dfrac{32}{\sqrt{\pi}\,(2k-1)^3}$.

3. Desarrollo en la base de autofunciones

Como $f(x)$ es continua en $[0, 2\pi]$, suave a trozos y además cumple las condiciones de contorno del problema ($f(0) = f(2\pi) = 0$), la serie converge **uniforme y puntualmente** a $f(x)$ en todo $[0, 2\pi]$:

$$x(2\pi - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32}{\sqrt{\pi}\,(2k-1)^3}\,\phi_{2k-1}(x)$$

O escrito explícitamente en función de x:

$$x(2\pi - x) = \frac{32}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}\,\operatorname{sen}\left(\frac{2k-1}{2}x\right), \quad x \in [0, 2\pi]$$