4.7 Introducción a Sistemas Autónomos Planos

Definición

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y, t) \\ y'(t) = G(x, y, t) \end{cases} \qquad t > 0\,, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Se dice que dicho sistema es autónomo, si

$$F(x, y, t) = F(x, y) \quad y \quad G(x, y, t) = G(x, y)\,,$$

es decir, si sus ecuaciones no dependen explícitamente de t.

- **Ejemplo:**
  - Sistema autónomo $\begin{cases} x'(t) = x^2 - sen^3 y + 1 \\ y'(t) = xseny - y^2 \end{cases}$
  - Sistema no autónomo $\begin{cases} x'(t) = tx - y^3 + 1 \\ y'(t) = 2x + y^2 - t^2 \end{cases}$

4.7 Introducción a Sistemas Autónomos Planos

Sea el sistema autónomo plano

$$\begin{cases} x'(t) = F(x,y) \\ y'(t) = G(x,y) \end{cases} \qquad t > 0\,, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

con $F,\ G \in \mathcal{C}^1(D)$.

Se verifica que para cada punto $(x_0, y_0) \in D$ y cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución $(x(t), y(t))$, definida en $t \in \mathcal{I}$, con $t_0 \in \mathcal{I}$, tal que $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$.

- Plano de fases --→ Plano xy
- Trayectorias de un sistema autónomo --→ Soluciones de dicho sistema, vistas como curvas en forma paramétrica $(x(t), y(t))$, $t \in \mathcal{I}$ del plano de fases.
- Diagrama de fases --→ Representación en el plano de fases del conjunto de trayectorias del sistema asociadas a los diferentes puntos iniciales. *Hemos visto varios ejemplos*

Definición (Puntos críticos)

Sea el sistema autónomo plano

$$(S) \equiv \begin{cases} x'(t) = F(x,y) \\ y'(t) = G(x,y) \end{cases}, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Se denomina Punto crítico de (S)*, a todo punto* (x_0, y_0) *tal que la curva*

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 \end{cases}, t > 0$$

es una solución de (S) *(constante en el tiempo).*
Los puntos críticos de (S) *vienen dados por las soluciones* (x_0, y_0) *del sistema*

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$$

La trayectoria en el plano de fases asociada a un punto crítico se reduce a dicho punto.

Definición (Solución periódica)

Sea el sistema autónomo plano

$$(S) \equiv \begin{cases} x'(t) = F(x,y) \\ y'(t) = G(x,y) \end{cases}, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Se denomina Solución periódica de (S), a toda solución $(x(t), y(t))$ de (S) que verifique que

$$x(t+T) = x(t), \qquad y(t+T) = y(t)$$

para algún $T > 0$.
Las trayectorias en el plano de fases asociadas a las soluciones periódicas de (S), se reducen a curvas cerradas.

4.7 Introducción a Sistemas Autónomos Planos

Sea el sistema autónomo plano

$$(S) \equiv \begin{cases} x'(t) = F(x,y)\,, & (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \\ y'(t) = G(x,y)\,, & F,\ G \in \mathcal{C}^1(D) \end{cases},$$

Propiedades de las trayectorias del sistema autónomo (S)

- Por cada punto $(x,y) \in D$ pasa una única trayectoria.
- La trayectoria que parte de un punto crítico, no se mueve de él.
- La trayectoria que parte de un punto no crítico, únicamente puede hacer una de las siguientes cosas:
  - Aproximarse a un punto crítico en tiempo infinito.
  - Recorrer una trayectoria cerrada (soluc. periódica).
  - Aproximarse a una trayectoria cerrada en tiempo infinito.
  - Escaparse al infinito.

  no pasa en s. lineales
- Una trayectoria que parte de un punto no crítico, no puede cortarse a sí misma, a menos que sea periódica.

4.8 Concepto de Estabilidad de Puntos Críticos de Sistemas Autónomos

Definición (Estabilidad)

Sea (x_0, y_0) *un punto crítico del sistema autónomo*

$$(S) \equiv \begin{cases} x'(t) = F(x,y) \\ y'(t) = G(x,y) \end{cases}, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

- (x_0, y_0) *es estable, si para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$dist((x(0), y(0)), (x_0, y_0)) < \delta \Rightarrow dist((x(t), y(t)), (x_0, y_0)) < \varepsilon \quad \forall t > 0$$

No se alejan del (0,0)

- (x_0, y_0) *es asintóticamente estable, si es estable y además existe* $\delta_1 > 0$, *con* $\delta_1 \leq \delta(\varepsilon)$ *tal que*

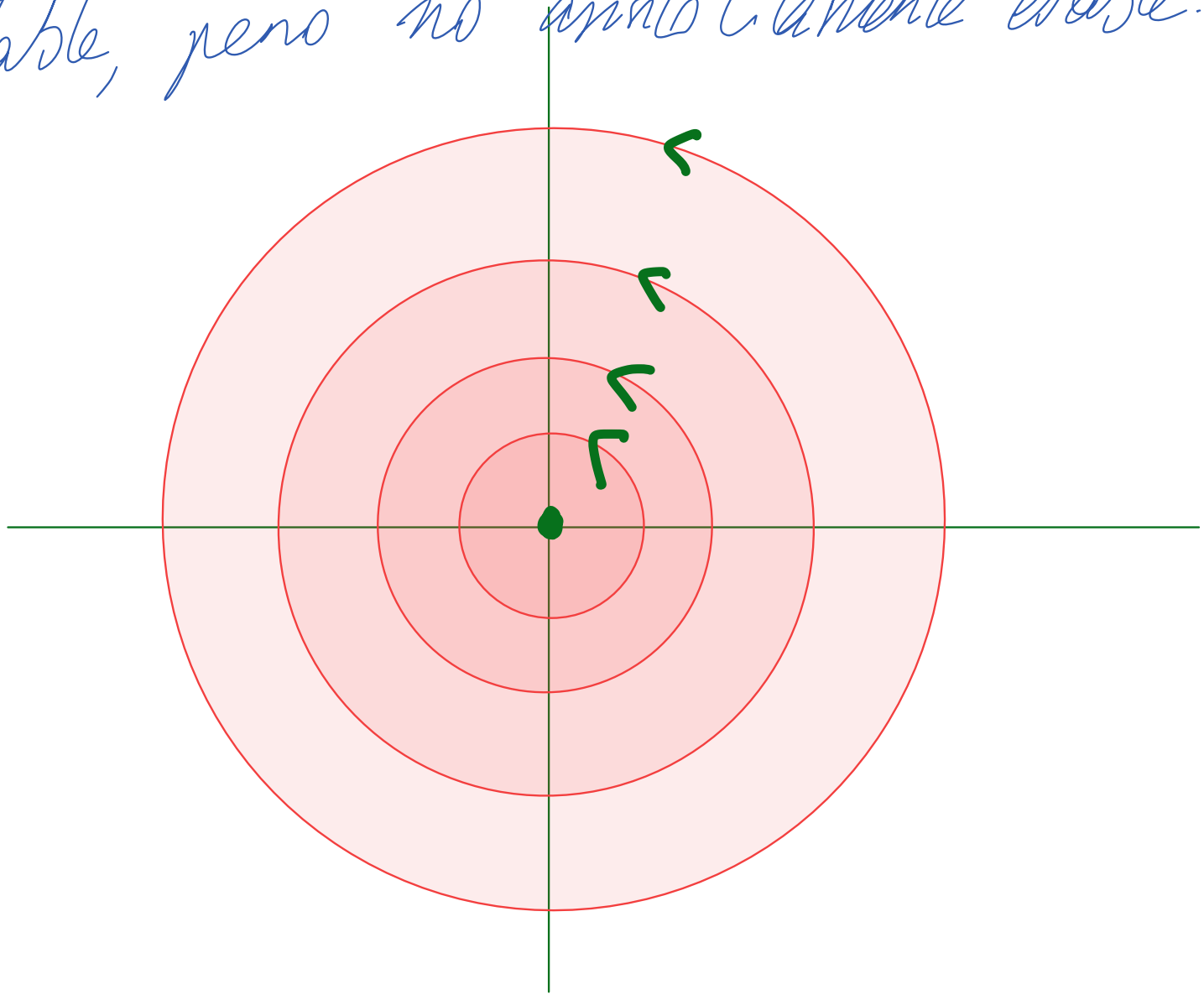
se acercan a (0,0)

$$dist((x(0), y(0)), (x_0, y_0)) < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$$

se alejan de (0,0)

- (x_0, y_0) *es inestable, si existe* $\varepsilon_1 > 0$, *tal que* $\forall\, \delta > 0$ *existe* $(x(0), y(0))$ *con* $dist((x(0), y(0)), (x_0, y_0)) < \delta$ *y sin embargo* $dist((x(t^*), y(t^*)), (x_0, y_0)) > \varepsilon_1$ *para algún* $t^* > 0$

Estable, pero no asintóticamente estable.



4.9 Estabilidad de Puntos Críticos de Sistemas Autónomos Lineales

Sistemas autónomos lineales homogéneos

Sea el sistema autónomo lineal

$$(SL) \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \in \mathcal{M}_{2\times 2}, \quad |A| \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$(0,0)$ único punto crítico de (SL)

$$\Downarrow$$

¿Estabilidad de $(0,0)$ a través de los autovalores de A ?

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad |A| = \lambda_1 \lambda_2, \quad traza(A) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0$$

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - traza(A)\lambda + |A|$$

$$(x(t), y(t)) = C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \bar{v}_2$$

$\bar{v}_i$ autovector asociado a λ_i, $i = 1, 2$

EL DIBUJO DEL PLANO DE FASE DEPENDE DE LOS AUTOVALORES

$$D = |A| = \lambda_1 \lambda_2 , \qquad \underset{tr}{traza}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\lambda^2 - tr\,\lambda + D = 0 \Rightarrow \Delta = tr^2 - 4D$$

signo de Δ → $+$ reales distintos

→ 0 real doble

→ $-$ complejos.

Comportamiento asintótico $e^{Re(\lambda)\,t}$

---

para reales: $D > 0 \Rightarrow$ signos iguales (como el de tr)

$D < 0 \Rightarrow$ signo distinto

para complejos: signo parte real = signo(traza)

4.9 Estabilidad de Puntos Críticos de Sistemas Autónomos Lineales

Teorema (Estabilidad de $(0,0)$ para (SL))

Sea el sistema autónomo lineal

$$(SL) \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad |A| \neq 0$$

Entonces, $(0,0)$ *es el único punto crítico de* (SL) *y éste es:*

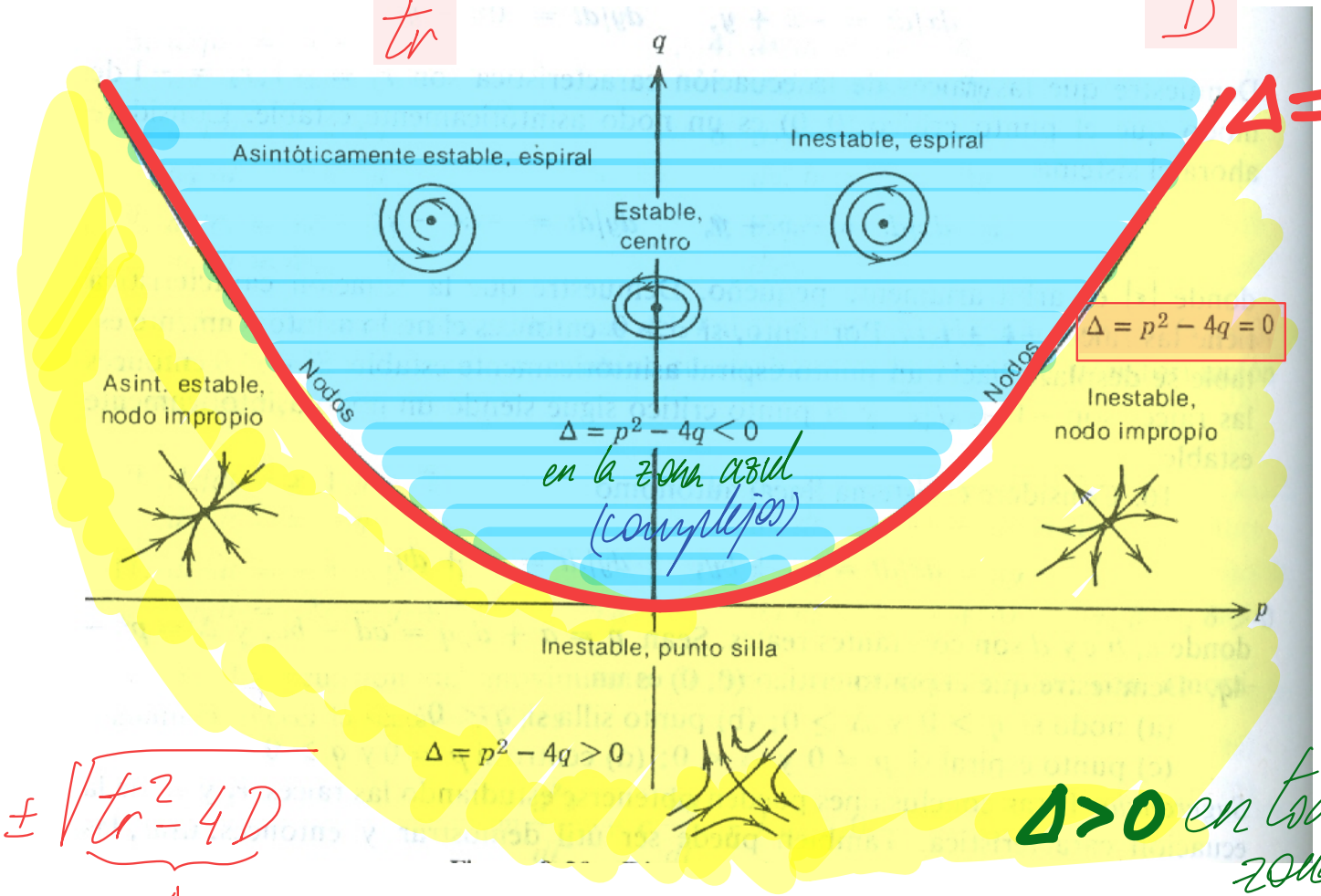
- *Asintóticamente estable, si los autovalores de A son reales y ambos negativos, o complejos conjugados con parte real negativa.*
- *Estable, pero No asintóticamente estable, si los autovalores de A complejos conjugados con parte real nula (imag. puros).*
- *Inestable, si los autovalores de A son reales y alguno de ellos positivo, o complejos conjugados con parte real positiva.*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0, \quad (0,0) \text{ pto. crítico}$$

$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad p = traza(A) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad q = |A| = \lambda_1 \lambda_2$

tr $\qquad$ D



$\lambda = tr \pm \sqrt{tr^2 - 4D}$, Δ

Figure: Diagrama de estabilidad

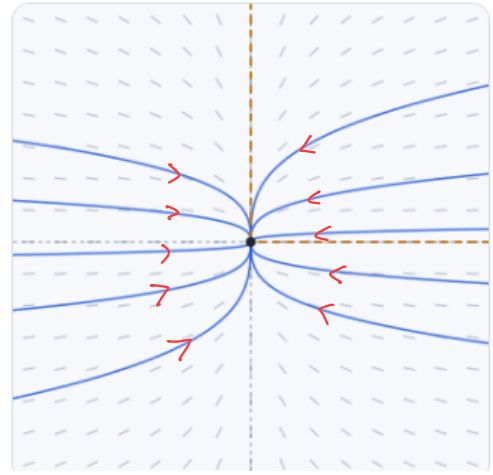
$$\begin{cases} x' = -3x \\ y' = -y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$tr = -4 < 0$

$D = 3 > 0$

$\Delta = tr^2 - 4D = 16 - 12 > 0$

autovalores reales distintos y del mismo signo (que $tr < 0$)



nodo estable

$$\begin{cases} x' = -5x \\ y' = 3y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Punto de silla

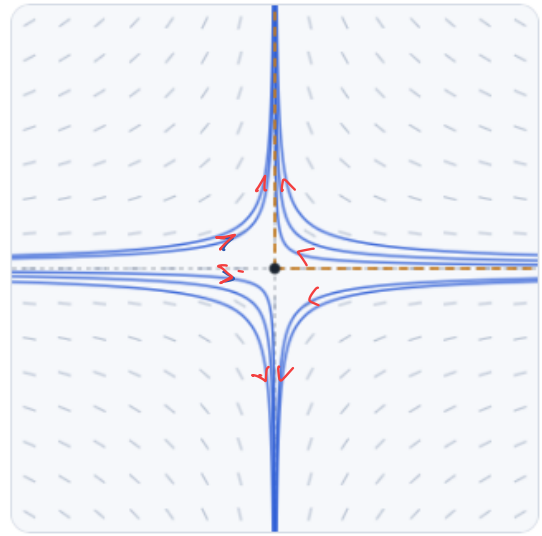
Inestable

$tr = -8 < 0$

$D = -15$

$\Delta = tr^2 - 4D = 64 - 60 > 0$

aut. reales distintos, de signo distintos.



$x' = x$

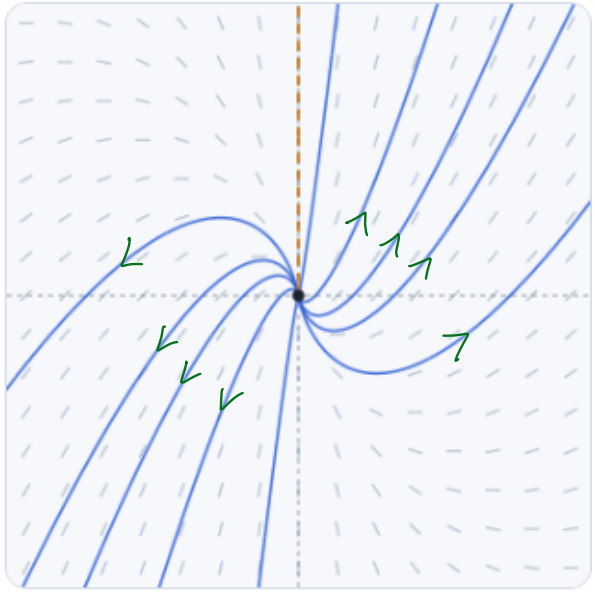
$y' = x + y$

no diagonal

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = 1$, $tr = 2$

$\Delta = tr^2 - 4D = 4 - 4 = 0$

aut. real doble, con signo el de $tr > 0$



$x' = -x + 3y$

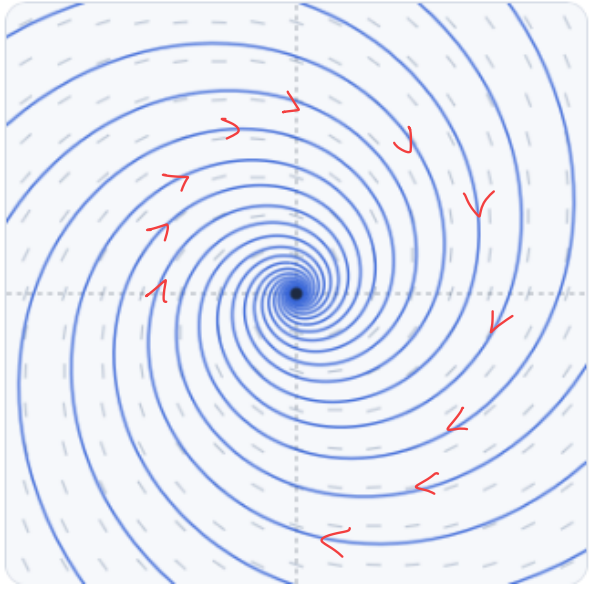
$y' = -3x - y$

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $D = 10$, $tr = -2$

$\Delta = tr^2 - 4D = 4 - 40 < 0$

aut. complejos con p. real < 0 (como tr)

espiral estable



4.9 Estabilidad de Puntos Críticos de Sistemas Autónomos Lineales

Sea el sistema autónomo lineal

$$(SL) \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad |A| \neq 0$$

Estabilidad de $(0,0)$ para (SL) (Autovalores reales)

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$
  - $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \Rightarrow (0,0)$ es un nodo atractor o sumidero (asint. estable)
  - $\lambda_1 > \lambda_2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ es un nodo repulsor o fuente (inestable)
  - $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow (0,0)$ es un punto de silla (inestable)
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1 = \lambda_2$
  - $\lambda_1 = \lambda_2 < 0 \Rightarrow (0,0)$ es un nodo degenerado atractor (asint. estable)
  - $\lambda_1 = \lambda_2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ es un nodo degenerado repulsor (inestable)

4.9 Estabilidad de Puntos Críticos de Sistemas Autónomos Lineales

Sea el sistema autónomo lineal

$$(SL) \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad |A| \neq 0$$

Estabilidad de $(0,0)$ para (SL) (Autovalores complejos (no reales))

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $(\lambda_1 = \bar{\lambda_2})$
  - $\Re e(\lambda_1) = \Re e(\lambda_2) = 0 \Rightarrow (0,0)$ es un centro (estable)
  - $\Re e(\lambda_1) = \Re e(\lambda_2) < 0 \Rightarrow (0,0)$ es un foco atractor o espiral asintóticamente estable
  - $\Re e(\lambda_1) = \Re e(\lambda_2) > 0 \Rightarrow (0,0)$ es un foco repulsor o espiral inestable