Exponencial de una matriz

A partir de $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots$ definimos

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

Si $A = PJP^{-1}$ entonces $A^k = PJ^kP^{-1}$ y se tiene $e^A = Pe^JP^{-1}$.

En el caso diagonalizable $A = PDP^{-1}$, con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (λ_i autovalores de A)

esto produce: $e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1} = \Phi$ matriz fundamental

Por la propiedad de la página anterior podemos tomar:

$$\tilde{\Phi} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$ como matriz fundamental.

La matriz P es una matriz de autovectores (con diagonalizable)

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$ así que

$$\Phi = P \cdot e^{Dt} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 \cdot e^{\lambda_1 t} & \cdots & v_n e^{\lambda_n t} \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}\right)$$

y finalmente la solución del sistema homogéneo es:

$$X_h = \Phi \cdot C = \Phi \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \uparrow \\ v_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \begin{pmatrix} \uparrow \\ v_n \\ \downarrow \end{pmatrix}$$

autovalores

autovectores

Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = -4x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A coef. constantes

$X' = AX$ es homogéneo.

$|A - \lambda I| = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$; $(1-\lambda)^2 - 4 = 0$; $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$; $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Autovectores: λ_1: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $b = 2a$; $(1,2)$

λ_2: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $2a = -b$; $(1,-2)$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; P^{-1} (no se necesita)

$A = P D P^{-1} \Rightarrow e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} \Rightarrow \Phi(t) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P^{-1}$ (regular)

$\tilde{\Phi}(t) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ e^{-t} v_1 & e^{3t} v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \Rightarrow X_h = c_1 e^{-t} \overline{v_1} + c_2 e^{3t} \overline{v_2}$

El caso de autovalores complejos

$\lambda = a \pm bi$ → para $+$ $V = V_1 + iV_2$ autovector

(2×2) (justificada + pág. más adelante)

$$X_h = c_1 e^{at}\left(\cos bt\, \bar{V}_1 - \operatorname{sen} bt\, \bar{V}_2\right) + c_2 e^{at}\left(\operatorname{sen} bt\, \bar{V}_1 + \cos bt\, \bar{V}_2\right)$$

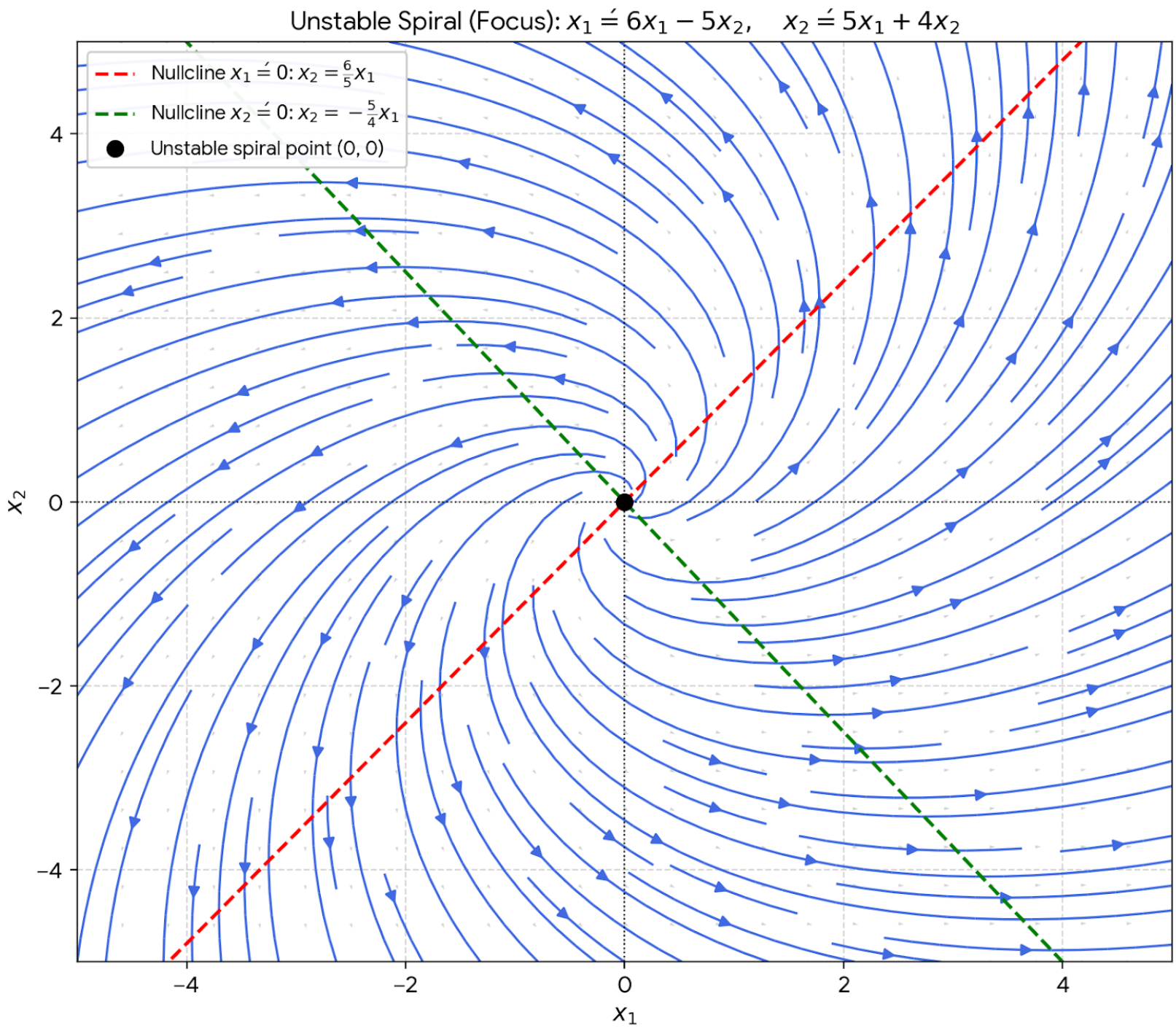
Ejemplo: $X' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} X \Rightarrow \lambda = 5 \pm 2i$ Con $\lambda = 5+2i$

$$\left.\begin{aligned} (1-2i)\alpha - \beta = 0 \\ 5\alpha - (1+2i)\beta = 0 \end{aligned}\right\} \alpha = 1,\ \beta = 1-2i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1} + i\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{V_2}$$

$$X_h = c_1 e^{5t}\left(\cos 2t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) + c_2 e^{5t}\left(\operatorname{sen} 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{5t}\cos 2t + c_2 e^{5t}\operatorname{sen} 2t \\ x_2 = c_1 e^{5t}(\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t) + c_2 e^{5t}(\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t) \end{cases}$$

plano de fase ⟹


Unstable Spiral (Focus): $\dot{x}_1 = 6x_1 - 5x_2, \quad \dot{x}_2 = 5x_1 + 4x_2$
Nullcline $\dot{x}_1 = 0$: $x_2 = \frac{6}{5}x_1$
Nullcline $\dot{x}_2 = 0$: $x_2 = -\frac{5}{4}x_1$
Unstable spiral point (0, 0)
x_1
x_2
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

Nota: la fórmula del caso complejo se obtiene haciendo

$$X_h = C_1 e^{(a+bi)t}\begin{pmatrix}\uparrow\\ \vec{z}_1\\ \downarrow\end{pmatrix} + C_2 e^{(a-bi)t}\begin{pmatrix}\uparrow\\ \vec{z}_2\\ \downarrow\end{pmatrix} \quad (*)$$

con $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ autovectores complejos, que siempre son conjugados

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1 + i\alpha_2\\ \beta_1 + i\beta_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{z}_2 = \begin{pmatrix}\alpha_1 - i\alpha_2\\ \beta_1 - i\beta_2\end{pmatrix} \text{ con } v_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$$

Se sustituye esto en (*), se reorganiza convirtiendo exp. compleja en seno y coseno y se llega a la fórmula.

Teorema

Sea el sistema lineal

de momento no pinta nada

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}\bar{X}(t) + \bar{B}(t), \quad \mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

donde $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{J}\mathcal{P}^{-1}$ *, siendo*

- $\mathcal{J}$ $\dashrightarrow$ *una forma canónica de Jordan de la matriz* $\mathcal{A}$
- $\mathcal{P}$ $\dashrightarrow$ *una matriz de paso asociada a* $\mathcal{J} \Rightarrow |\mathcal{P}| \neq 0$

Entonces, una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo viene dada por

$$\Phi(t) := e^{\mathcal{A}t} = \mathcal{P}e^{\mathcal{J}t}\mathcal{P}^{-1},$$

y debido a que $|\mathcal{P}| \neq 0$*, otra matriz fundamental del mismo es*

$$\tilde{\Phi}(t) := e^{\mathcal{A}t}\mathcal{P} = \mathcal{P}e^{\mathcal{J}t}$$

- **Repaso del cálculo de $e^{\mathcal{A}t}$ con $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$**

  - $\mathcal{J}$ $\dashrightarrow$ una forma canónica de Jordan de la matriz $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{P}$ $\dashrightarrow$ una matriz de paso asociada a $\mathcal{J}$.

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{J}\mathcal{P}^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathcal{A}t} = \mathcal{P}e^{\mathcal{J}t}\mathcal{P}^{-1}$$

Para el cálculo de $e^{\mathcal{J}t}$ deben tenerse en cuenta:

- Si $\mathcal{J}$ queda subdividida en l cajas en la forma

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & & \\ & \mathcal{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{J}_l \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathcal{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\mathcal{J}_1 t} & & & \\ & e^{\mathcal{J}_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mathcal{J}_l t} \end{pmatrix}$$

- **Repaso del cálculo de $e^{\mathcal{A}t}$ con $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$**

  - Si la caja $\mathcal{J}_i$, $i = 1, \ldots, l$, es diagonal, (el caso que hemos visto hasta ahora.)

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{J}_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathcal{J}_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & & & \\ & e^{\lambda_i t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

(r_i columnas; $\lambda_i I_{r_i}$; $=$ $e^{\lambda_i t} \cdot I_{r_i}$)

4.4 SEDOs lineales de coeficientes constantes

- Si la caja $\mathcal{J}_i$, $i = 1, \ldots, l$, es de la forma

$$\mathcal{J}_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r_i \times r_i}$$

Veremos un ejemplo encillo más adelante.

$$\Downarrow$$

$$e^{\mathcal{J}_i t} := e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{t}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & \frac{t}{1!} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{t}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{t}{1!} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r_i \times r_i}$$

Estructura del conjunto de soluciones

Teorema

El conjunto de soluciones del SEDO lineal completo

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}(t)\,, \qquad \mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

tiene estructura de espacio afín de dimensión n con espacio vectorial asociado, el espacio vectorial de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado. Por ello

$$\bar{X}_G^c(t) = \bar{X}_G^H(t) + \bar{X}_P^c(t) = \Phi(t)\bar{C} + \bar{X}_P^c(t)\,,$$

donde $\Phi(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es una matriz fundamental del SEDO lineal homogéneo asociado y $\bar{C} := (C_i)_{i=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ es un vector de constantes arbitrarias, con $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Principio de Superposición de Soluciones

Teorema

Si $\bar{\varphi}_i(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ *es una solución del sistema*

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}_i(t)\,,$$

donde $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $\bar{B}_i(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, $i = 1, 2$, *entonces*

$$\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}_1(t) + \bar{\varphi}_2(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}\,,$$

es solución del sistema

particular para particular para

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t) + (\bar{B}_1(t) + \bar{B}_2(t))\,.$$

Método de Variación de Constantes

Objetivo: Búsqueda de una solución particular $\bar{X}_P^c(t)$ del SEDO lineal completo.

Estructura planteada $\Rightarrow \bar{X}_P^c(t) := \Phi(t)\bar{C}(t) \Rightarrow \bar{C}(t)$?

$\Phi(t)$ $\dashrightarrow$ Matriz fundamental del SEDO lineal homogéneo asociado

$$\Downarrow$$

$\bar{X}_P^c(t)$ solución del SEDO lineal completo

$$\Downarrow (\star)$$

$$\bar{C}'(t) = \Phi^{-1}(t)\bar{B}(t) \quad \Rightarrow \quad \bar{C}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\bar{B}(t)\,dt$$

Sustituyendo en la estructura inicialmente planteada

$$\Downarrow$$

$$\bar{X}_P^c(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\bar{B}(t)\,dt \in \mathcal{M}_{n\times 1}$$

Solución general del sistema completo

Teorema

Sean el SEDO lineal completo

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}(t)\,,$$

con $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $\bar{B}(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ *y* $\Phi(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *una matriz fundamental del SEDO lineal homogéneo asociado. Entonces una expresión de la solución general* $\bar{X}_G^c(t)$ *del SEDO completo es*

$$\bar{X}_G^c(t) = \Phi(t)\left(\bar{C} + \int \Phi^{-1}(t)\bar{B}(t)\,dt\right),$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}\,, \quad C_i \in \mathbb{R}\,,\ i = 1,\ldots,n$$

Example (Problema 1 - Hoja 4A)

Demuéstrese que si $\bar{\varphi}(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ es un vector solución de un sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes, entonces $\bar{\varphi}'(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ también es vector solución de dicho sistema.

Example (Problema 2 - Hoja 4A)

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = -2x + 3y + e^t \end{cases}$$

Hállese la solución particular que pasa por el punto $(t_0; x_0, y_0) = (0; 1, 2)$.

Example (Problema 3 - Hoja 4B)

Sabiendo que las funciones

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} sen(2t) \\ cos^2(t) \\ t^2+1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_2 = \begin{pmatrix} sen(t)cos(t) \\ sen^2(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$$

son soluciones de un sistema lineal completo de coeficientes constantes

$$X'(t) + AX(t) = B(t),$$

se pide:

i) Obtener la solución general de dicho sistema lineal completo.

ii) Determinar la matriz de coeficientes A y el vector de términos independientes $B(t)$ de dicho sistema.

Ejercicio (Problema 1 - Hoja 4B)

Resuélvase el SEDO lineal homogéneo

$$\bar{X}'(t) = A\bar{X}(t)$$

en cada uno de los siguientes casos:

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad ii)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio (Problema 2 - Hoja 4B)

Hállese la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$a) \begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = x + e^{-t} \end{cases},$$

$$b) \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + t \\ z' = 2x + 2y + 3z + sen(t) \end{cases}, c) \begin{cases} x' = 2y + 1 \\ y' = 2x + 5e^{-t} \\ z' = 2x + 2y + 3z + 1 \end{cases}$$

Ejercicio (Problema 3 - Hoja 4B)

Resuélvanse los siguientes problemas de valor inicial:

$$a)\begin{cases} x' = x - 2y - t\,; & x(0) = 1 \\ y' = 2x - 3y - t\,; & y(0) = 1 \end{cases},$$

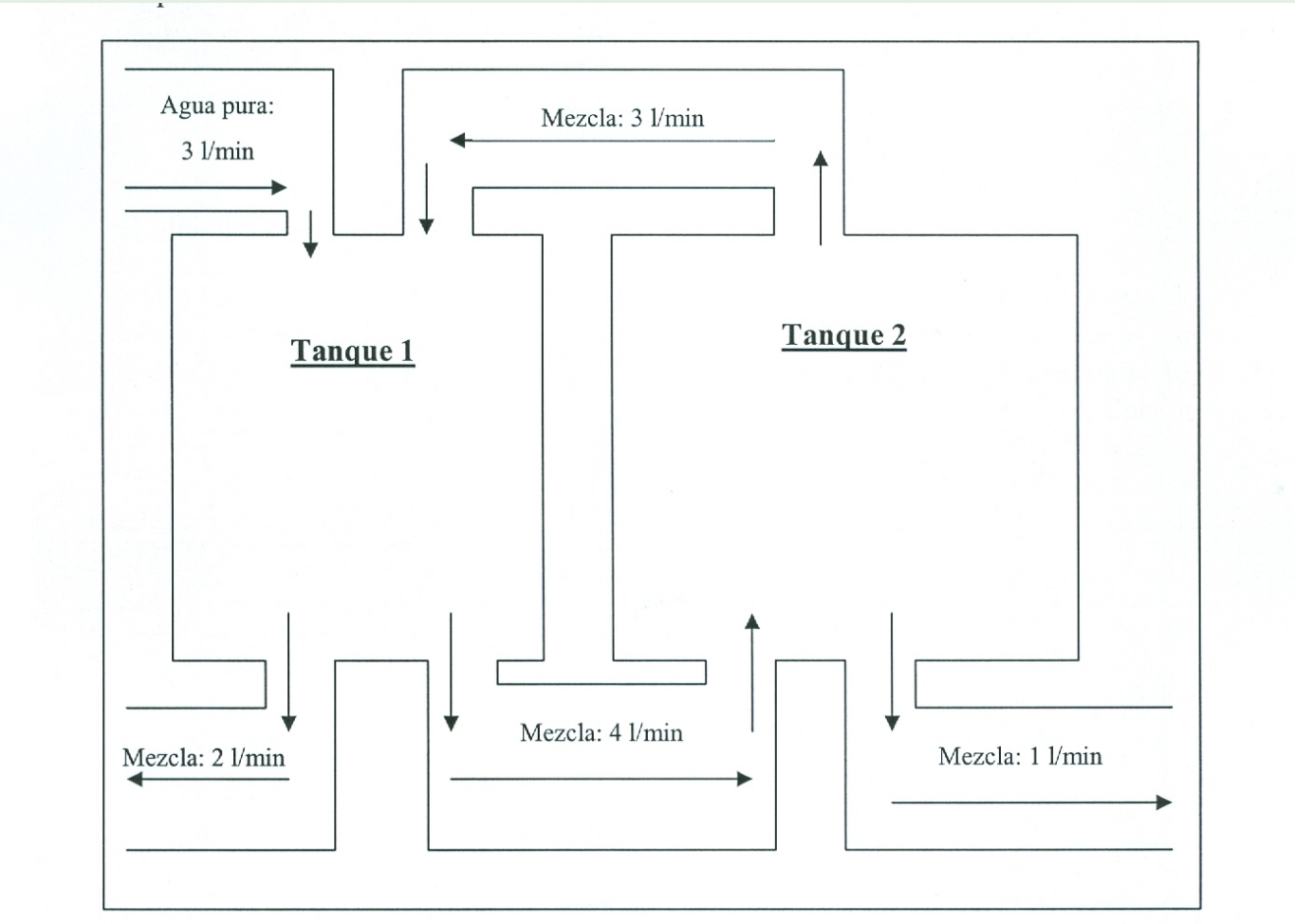
$$b)\begin{cases} x' = 2x + y + 1\,; & x(0) = 0 \\ y' = 6x + y + te^{-t}\,; & y(0) = 1 \end{cases}$$

Examples (Véase apartado de aplicaciones de SEDOS lineales)

- Problema 4 de Hoja 4A (Problemas de mezclas)
- Problema 5** de Hoja 4A (Problemas de masa-resorte)
- Problema 7 de Hoja 4A (Problemas de movimiento)
- Problema 6 de Hoja 4A (Problemas de circuitos eléctricos).

Problemas de mezclas

Example (Problema 4 - Hoja 4A)



4*.- Dos tanques se encuentran conectados por una serie de tuberías, como es mostrado en la figura inferior. El tanque 1, contiene inicialmente 20 litros de agua donde se han disuelto 150 gramos de cloro. El tanque 2, contiene inicialmente 50 gramos de cloro, disueltos en 10 litros de agua. En el instante inicial, se bombea agua pura en el tanque 1 a razón de 3 litros por minuto, mientras que las soluciones de cloro y agua se intercambian entre los tanques y también salen de ellos, en las razones indicadas en la figura adjunta. Analícese el comportamiento para tiempos grandes ($t \to \infty$) de las cantidades de cloro que hay en cada tanque en cada instante de tiempo.

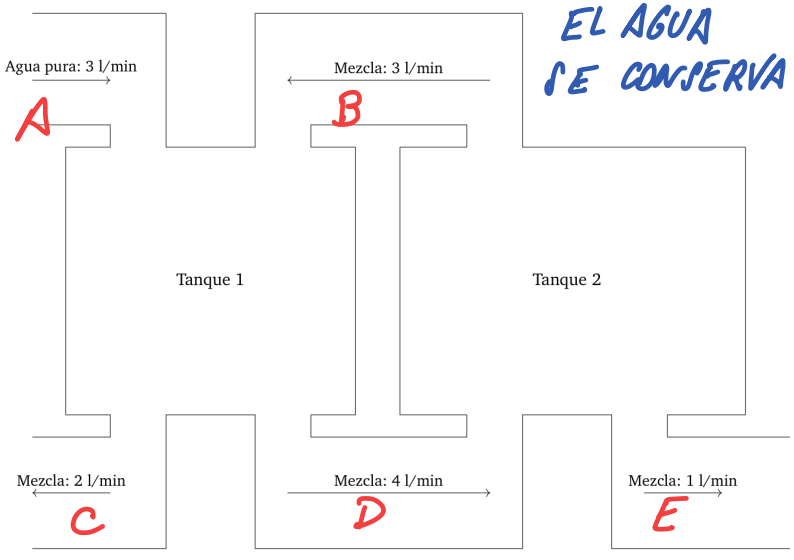


Figura 1. Tanques.

EL AGUA SE CONSERVA

Las variables de interés son:

$$\begin{cases} x(t) = \text{gr. de Cl en } T_1 \text{ en } t \\ y(t) = \text{gr. de Cl en } T_2 \text{ en } t \end{cases}$$

Ecuaciones del cambio:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\text{entrada Cl } T_1) - (\text{salida Cl } T_2) \\ \frac{dy}{dt} = (\text{entrada Cl } T_2) - (\text{salida Cl } T_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 3 \cdot \frac{y}{10} - (2+4)\frac{x}{20} \\ y' = 4\frac{x}{20} - (3+1)\frac{y}{10} \end{cases}$$

(B, C+D, D, D+E)

$$\begin{cases} x' = \frac{-3}{10}x + \frac{3}{10}y \\ y' = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 150 \\ y(0) = 50 \end{cases}$$

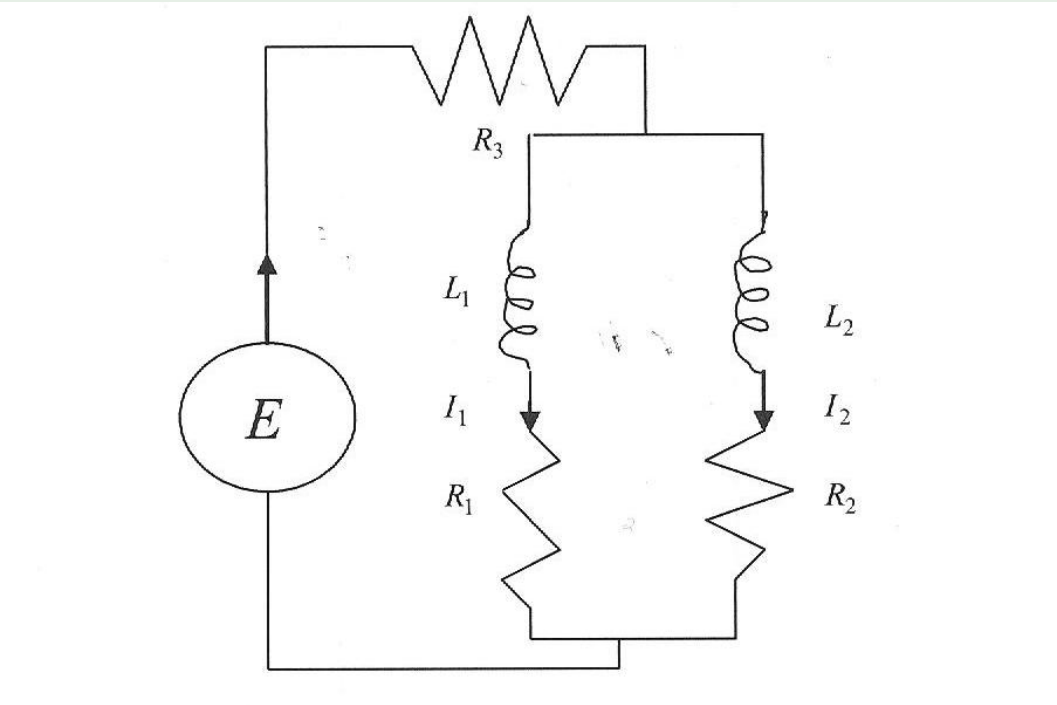
Problemas de movimiento

Example (Problema 6 - Hoja 4A)

Un punto material se mueve sobre el plano OXY de forma que, en todo instante de tiempo $t > 0$, la componente sobre OY de la velocidad es doble que su componente sobre OX y la componente sobre OX de la aceleración es el triple de la suma de la abcisa y la ordenada del punto correspondiente. Sabiendo que en $t = 0$ la partícula está en el origen de coordenadas y que en ese instante la componente sobre OX de la velocidad es 6 m/seg., obténgase la ecuación de la trayectoria.

Circuitos eléctricos RL - RLC

Example (Problema 6 - Hoja 4A)



4.4 SEDOs lineales de coeficientes constantes

- Si la caja $\mathcal{J}_i$, $i = 1, \ldots, l$, es de la forma

$$\mathcal{J}_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r_i \times r_i}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\mathcal{J}_i t} := e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{t}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & \frac{t}{1!} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{t}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{t}{1!} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r_i \times r_i}$$

y ejemplo

Ejemplo adicional

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

Si $\ker(A - 2I)$ es de dimensión 2, no hay problema. Pero

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = v \Rightarrow L((1,1)) \text{ es unidimensional.}$$

Si calculáis $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Buscamos entonces

$v_1 \in \ker(A-2I)^2 - \ker(A-2I)$

P. ejemplo $(1,0)^T = v_1$

Y ahora sea $v_2 = (A - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,1)^T$. Con esto $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Y como $\begin{cases} Av_1 = 2v_1 + v_2 \\ Av_2 = 2v_2 \end{cases}$ se tiene $A = P \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{J} P^{-1}$.

Ahora, ¿cómo se usa esto para calcular e^{At}?

Como en el caso diagonalizable $A^k = PJ^kP^{-1}$ luego $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$ (prescindible)

Pero $J = D + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

diagonal nilpotente.

Y así $e^{Jt} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}\,e^{Nt}$

fácil

$Nt = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (Nt)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow e^{Nt} = I + Nt + 0 + 0 + \cdots = I + Nt$

$e^{Jt} = e^{Dt}\cdot(I+Nt) = e^{Dt} + \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ te^{2t} & 0 \end{pmatrix}$

En resumen, si $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ entonces

$$e^{Jt} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Como dicen las notas de teoría. Si fuera

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ entonces}$$

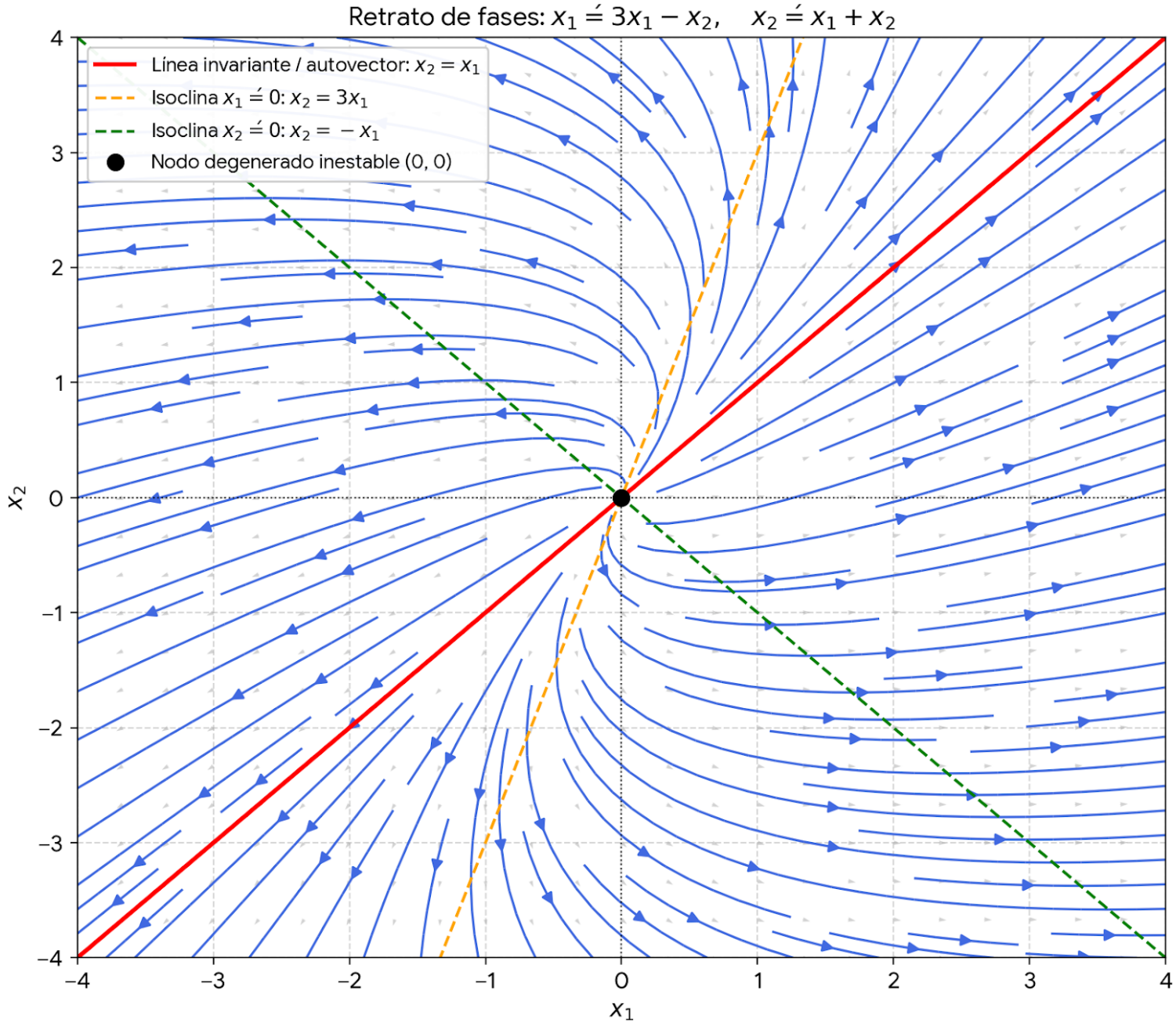
$$e^{Jt} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Volviendo al sistema: $\underline{\Phi} = P \cdot e^{Jt} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

y con eso

$$X_h = \underline{\Phi} \cdot C = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuyo plano de fase es $\longrightarrow$


Retrato de fases: $\dot{x}_1 = 3x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2$
Línea invariante / autovector: $x_2 = x_1$
Isoclina $\dot{x}_1 = 0$: $x_2 = 3x_1$
Isoclina $\dot{x}_2 = 0$: $x_2 = -x_1$
Nodo degenerado inestable (0, 0)
x_1
x_2
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4

4.5 Resolución de SEDOs Lineales por Transformada de Laplace

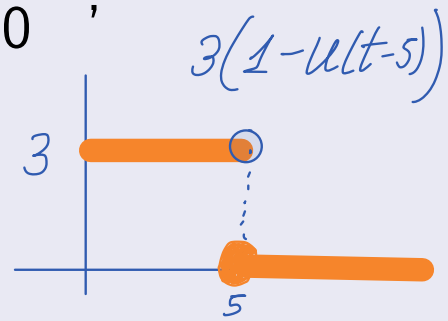
Ejercicio (Problema 4 - Hoja 4B)

Hállese la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2f(t)\,; & x(0) = 1 \\ y' = x + f(t)\,; & y(0) = 0 \end{cases},$$

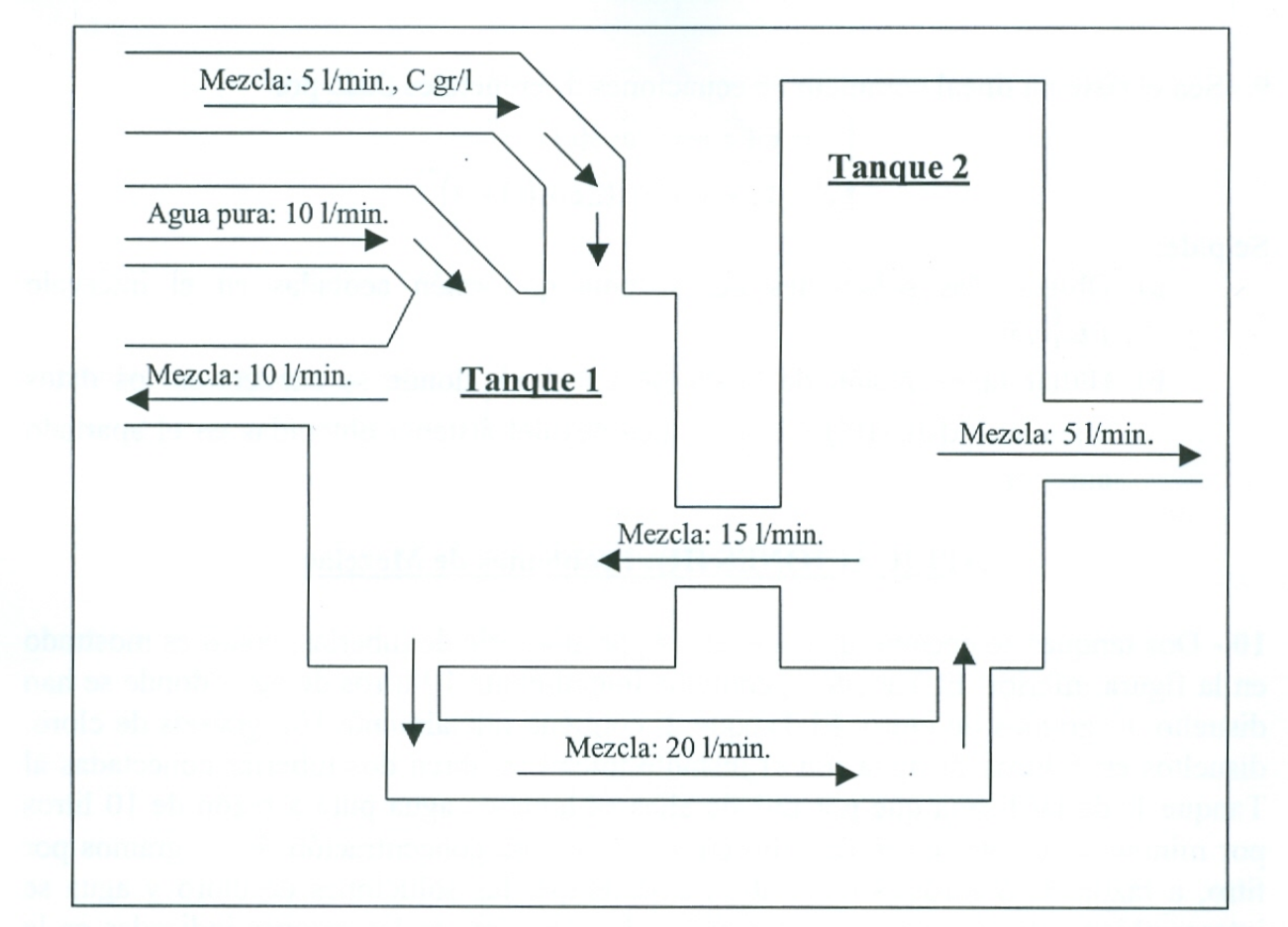
donde

$$f(t) = \begin{cases} 3 & si \quad 0 \leq t < 5 \\ 0 & si \quad t \geq 5 \end{cases}$$



Problemas de mezclas

Ejercicio (Problema 8 - Hoja 4B)



4.7 Introducción a Sistemas Autónomos Planos

Definición

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y, t) \\ y'(t) = G(x, y, t) \end{cases} \qquad t > 0\,, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Se dice que dicho sistema es autónomo, si

$$F(x, y, t) = F(x, y) \quad y \quad G(x, y, t) = G(x, y)\,,$$

es decir, si sus ecuaciones no dependen explícitamente de t.

- **Ejemplo:**
  - Sistema autónomo $\begin{cases} x'(t) = x^2 - sen^3 y + 1 \\ y'(t) = xseny - y^2 \end{cases}$
  - Sistema no autónomo $\begin{cases} x'(t) = tx - y^3 + 1 \\ y'(t) = 2x + y^2 - t^2 \end{cases}$

4.7 Introducción a Sistemas Autónomos Planos

Sea el sistema autónomo plano

$$\begin{cases} x'(t) = F(x,y) \\ y'(t) = G(x,y) \end{cases} \qquad t > 0\,, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

con $F,\ G \in \mathcal{C}^1(D)$.

Se verifica que para cada punto $(x_0, y_0) \in D$ y cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución $(x(t), y(t))$, definida en $t \in \mathcal{I}$, con $t_0 \in \mathcal{I}$, tal que $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$.

- Plano de fases $\dashrightarrow$ Plano xy
- Trayectorias de un sistema autónomo $\dashrightarrow$ Soluciones de dicho sistema, vistas como curvas en forma paramétrica $(x(t), y(t))$, $t \in \mathcal{I}$ del plano de fases.
- Diagrama de fases $\dashrightarrow$ Representación en el plano de fases del conjunto de trayectorias del sistema asociadas a los diferentes puntos iniciales.

Hemos visto varios ejemplos

Definición (Puntos críticos)

Sea el sistema autónomo plano

$$(S) \equiv \begin{cases} x'(t) = F(x,y) \\ y'(t) = G(x,y) \end{cases}, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Se denomina Punto crítico de (S)*, a todo punto* (x_0, y_0) *tal que la curva*

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 \end{cases}, t > 0$$

es una solución de (S) *(constante en el tiempo).*
Los puntos críticos de (S) *vienen dados por las soluciones* (x_0, y_0) *del sistema*

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$$

La trayectoria en el plano de fases asociada a un punto crítico se reduce a dicho punto.

Definición (Solución periódica)

Sea el sistema autónomo plano

$$(S) \equiv \begin{cases} x'(t) = F(x,y) \\ y'(t) = G(x,y) \end{cases}, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Se denomina Solución periódica de (S), a toda solución $(x(t), y(t))$ de (S) que verifique que

$$x(t+T) = x(t), \qquad y(t+T) = y(t)$$

para algún $T > 0$.
Las trayectorias en el plano de fases asociadas a las soluciones periódicas de (S), se reducen a curvas cerradas.

4.7 Introducción a Sistemas Autónomos Planos

Sea el sistema autónomo plano

$$(S) \equiv \begin{cases} x'(t) = F(x,y)\,, & (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \\ y'(t) = G(x,y)\,, & F,\ G \in \mathcal{C}^1(D) \end{cases},$$

Propiedades de las trayectorias del sistema autónomo (S)

- Por cada punto $(x,y) \in D$ pasa una única trayectoria.
- La trayectoria que parte de un punto crítico, no se mueve de él.
- La trayectoria que parte de un punto no crítico, únicamente puede hacer una de las siguientes cosas:
  - Aproximarse a un punto crítico en tiempo infinito.
  - Recorrer una trayectoria cerrada (soluc. periódica).
  - Aproximarse a una trayectoria cerrada en tiempo infinito.
  - Escaparse al infinito.
- Una trayectoria que parte de un punto no crítico, no puede cortarse a sí misma, a menos que sea periódica.