

COMILLAS

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

ICAI

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Tema 4:
Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y Estabilidad

ECUACIONES DIFERENCIALES

Dpto. de Matemática Aplicada
Escuela Técnica Superior de Ingeniería - ICAI
Universidad Pontificia Comillas

Objetivos a cubrir

Una vez finalizado el tema, el alumno:

- Conocerá la terminología básica y resultados elementales relativos a SEDOs lineales y no lineales.
- Manejará con fluidez y soltura las técnicas elementales de resolución de SEDOs lineales
- Sabrá obtener información cualitativa de soluciones de EDOs y SEDOs no lineales, vía el estudio de la estabilidad de sus puntos críticos.
- Conocerá algunas de las muchas aplicaciones de los SEDOs lineales y no lineales a problemas del campo de la física y la ingeniería.
- Sabrá analizar el comportamiento para tiempos grandes de diferentes fenómenos del campo de la física y la ingeniería, modelados por EDOs y SEDOs no lineales, vía el estudio de la estabilidad de los puntos críticos del sistema que modela el fenómeno en cuestión.

Bibliografía del tema

Los contenidos del tema pueden ser seguidos por:

- Transparencias de clase
- Capítulo 4 (1^a y 2^a parte) de *Ecuaciones Diferenciales y en Derivadas Parciales (Apuntes del curso en el Portal de Recursos)*, Cano Casanova, S. y Jiménez Casas, A.
- Hoja 4A y Hoja 4B de problemas de la asignatura
- *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría y Problemas. Métodos exactos, métodos numéricos, estudio cualitativo*. De la Villa Cuenca, A., López de la Rica, A. y otros autores. CLAGSA, 2006.

Índice de contenidos

- Introducción a SEDOs de primer orden
- SEDOs lineales homogéneos
- SEDOs lineales completos
- SEDOs lineales de coeficientes constantes
- Resolución de SEDOs lineales por Transformada de Laplace
- Aplicaciones de SEDOs lineales
- Introducción a sistemas autónomos planos
- Concepto de estabilidad de puntos críticos de sistemas autónomos
- Estabilidad de puntos críticos de sistemas autónomos lineales
- Estabilidad de puntos críticos de sistemas autónomos no lineales
- Aplicaciones de sistemas autónomos

Definiciones previas

Definición

Se denomina SEDO de primer orden, a todo sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \end{cases}, \ t \in \mathcal{I}$$

donde

En general, muy difícil.

- $\mathcal{I}$ --→ *intervalo de trabajo*
- $t \in \mathcal{I}$ --→ *variable independiente de las funciones incógnitas*
- $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ --→ *funciones incógnitas.*

Definiciones previas

Definición

Se denomina SEDO lineal de primer orden, a todo sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}, \; t \in \mathcal{I}$$

donde

- $a_{ij}(t) : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ --→ *coeficientes del sistema*
- $b_i(t) : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ --→ *términos independientes del sistema*
- $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ --→ *funciones incógnitas.*

Definiciones previas

Definición

Sea el SEDO lineal de primer orden

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} x_1'(t) & = & a_{11}(t)x_1(t) & + \ldots + & a_{1n}(t)x_n(t) & + & b_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}(t)x_1(t) & + \ldots + & a_{2n}(t)x_n(t) & + & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}(t)x_1(t) & + \ldots + & a_{nn}(t)x_n(t) & + & b_n(t) \end{array}\right. , \; t \in \mathcal{I}$$

- *Sistema lineal homogéneo si* $b_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- *Sistema lineal completo, en caso contrario.*
- *Sistema lineal de coeficientes constantes, si todas las funciones* $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *son funciones constantes, es decir, si*

$$a_{ij}(t) = a_{ij} \in \mathbb{R}\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Expresión matricial de SEDOs lineales

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\bar{X}'(t) \qquad\qquad \mathcal{A}(t) \qquad\qquad \bar{X}(t) \qquad\qquad \bar{B}(t)$$

- Vector de incógnitas $\bar{X}(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$,
- Matriz de coeficientes $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$
- Vector de términos independientes $\bar{B}(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$

$$\Downarrow$$

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}(t).$$

Expresión matricial de SEDOs lineales

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}(t)\,, \quad t \in \mathcal{I}$$

- $\bar{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ es solución del sistema si

$$\bar{\varphi}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{\varphi}(t) + \bar{B}(t)\,, \quad t \in \mathcal{I}$$

- Estructura de la solución general:

$$\bar{X}_G(t) = \bar{\varphi}(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \in \mathcal{M}_{n\times 1}\,, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$$

- Sistema lineal homogéneo

$$\bar{B}(t) \equiv 0 \Rightarrow \bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t)\,, \quad t \in \mathcal{I}$$

- Sistema lineal de coeficientes constantes

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}\,, \quad \bar{X}'(t) = \mathcal{A}\bar{X}(t) + \bar{B}(t)\,, \quad t \in \mathcal{I}$$

Estructura del conjunto de soluciones

Teorema

El conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t)\,, \qquad \mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n. Por ello, si

$$\mathcal{B} = \{\bar{\phi}_1(t), \bar{\phi}_2(t), \ldots, \bar{\phi}_n(t)\}$$

es una base de dicho espacio vectorial de soluciones, entonces

$$\bar{X}_G^H(t) = C_1\bar{\phi}_1(t) + C_2\bar{\phi}_2(t) + \ldots + C_n\bar{\phi}_n(t) = \Phi(t)\,\bar{C}$$

$$\bar{C} := \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\,,\ \Phi(t) := \left(\bar{\phi}_1(t) \mid \bar{\phi}_2(t) \mid \vdots \mid \bar{\phi}_n(t)\right)$$

Estructura del conjunto de soluciones

Definición

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t)\,, \qquad \mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

Se denomina Sistema fundamental de soluciones del sistema, a todo conjunto de n vectores solución

$$\mathcal{B} = \{\bar{\phi}_1(t), \bar{\phi}_2(t), \ldots, \bar{\phi}_n(t)\}$$

que constituya una base del esp. vect. de soluciones de éste. En este caso la matriz (está sí es una matriz $n\times n$)

$$\Phi(t) := \left(\bar{\phi}_1(t) \mid \bar{\phi}_2(t) \mid \vdots \mid \bar{\phi}_m(t)\right) \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

es una Matriz fundamental del sistema y $\bar{X}_G^H(t) = \Phi(t)\bar{C}$

Propiedades de matrices fundamentales

Sea $\Phi(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz fundamental de

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t)\,, \quad t \in \mathcal{I}$$

Entonces:

- $\Phi(t)$ es matriz solución, es decir,

$$\Phi'(t) = \mathcal{A}(t)\Phi(t)\,, \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

- $|\Phi(t)| \neq 0 \quad \forall t \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \Phi^{-1}(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}$;
- Como consecuencia de los puntos anteriores, se verifica que

$$\mathcal{A}(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t)\,.$$

$\Phi(t)$ Matriz fundamental $\quad \Rightarrow \quad$ Matriz de coeficientes $\mathcal{A}(t)$

- Si $K \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es una matriz constante y regular ($|K| \neq 0$)

$\Downarrow$ útil más adelante.

$\tilde{\Phi}(t) := \Phi(t)K \in \mathcal{M}_{n\times n}$ matriz fundamental

Esta propiedad

- Si $K \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es una matriz constante y regular ($|K| \neq 0$)

$$\Downarrow$$

$\tilde{\Phi}(t) := \Phi(t)K \in \mathcal{M}_{n\times n}$ matriz fundamental

sólo dice que si las columnas de $\Phi(t)$ son soluciones independientes, cualquier combinación lineal (cada columna de $\Phi(t)$) también es solución. Y si además K es regular, la independencia de las columnas se preserva

Estructura del conjunto de soluciones

Teorema

El conjunto de soluciones del SEDO lineal completo

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}(t)\,, \qquad \mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

tiene estructura de espacio afín de dimensión n con espacio vectorial asociado, el espacio vectorial de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado. Por ello

$$\bar{X}_G^c(t) = \bar{X}_G^H(t) + \bar{X}_P^c(t) = \Phi(t)\bar{C} + \bar{X}_P^c(t)\,,$$

donde $\Phi(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es una matriz fundamental del SEDO lineal homogéneo asociado y $\bar{C} := (C_i)_{i=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ es un vector de constantes arbitrarias, con $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Principio de Superposición de Soluciones

Teorema

Si $\bar{\varphi}_i(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ *es una solución del sistema*

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t) + \bar{B}_i(t)\,,$$

donde $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $\bar{B}_i(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, $i = 1, 2$, *entonces*

$$\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}_1(t) + \bar{\varphi}_2(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}\,,$$

es solución del sistema

particular para particular para

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\bar{X}(t) + (\bar{B}_1(t) + \bar{B}_2(t))\,.$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = -4x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A coef. constantes

$X' = AX$ es homogéneo.

$|A - \lambda I| = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$; $(1-\lambda)^2 - 4 = 0$; $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$; $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Autovectores: $\lambda_1: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $b = 2a$; $(1,2)$

$\lambda_2: \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $2a = -b$; $(1,-2)$

$\Rightarrow P = \underset{\text{eig}\to\text{can}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$; $P^{-1} = \underset{\text{can}\to\text{eig}}{\begin{pmatrix} \text{no} \\ \text{se} \\ \text{necesita} \end{pmatrix}}$

$A = \underset{\text{can}}{P} \; \underset{(\text{eig}\to\text{can})}{D} \; \underset{\text{eig}}{P^{-1}} \; \underset{(\text{can}\to\text{eig})}{} \Rightarrow e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} \Rightarrow \Phi(t) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P^{-1} \; (\text{regular})$

$\tilde{\Phi}(t) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ e^{-t}v_1 & e^{3t}v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \Rightarrow X_h = c_1 e^{-t} \overline{v_1} + c_2 e^{3t} \overline{v_2}$

Si tenemos $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad X' = AX$

Si A es diagonalizable: $A = PDP^{-1}$ $\qquad U \qquad X$

$$P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

Pero si $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

está claro que $U' = P^{-1}X'$

Así que $U' = DU$

será $\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ u_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ $\quad U = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$X = P \cdot U$

Teorema

Sea el sistema lineal

de momento no pinta nada

$$\bar{X}'(t) = \mathcal{A}\bar{X}(t) + \bar{B}(t), \quad \mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

donde $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{J}\mathcal{P}^{-1}$, *siendo*

- $\mathcal{J}$ $\dashrightarrow$ *una forma canónica de Jordan de la matriz* $\mathcal{A}$
- $\mathcal{P}$ $\dashrightarrow$ *una matriz de paso asociada a* $\mathcal{J} \Rightarrow |\mathcal{P}| \neq 0$

Entonces, una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo viene dada por

$$\Phi(t) := e^{\mathcal{A}t} = \mathcal{P}e^{\mathcal{J}t}\mathcal{P}^{-1},$$

y debido a que $|\mathcal{P}| \neq 0$, *otra matriz fundamental del mismo es*

$$\tilde{\Phi}(t) := e^{\mathcal{A}t}\mathcal{P} = \mathcal{P}e^{\mathcal{J}t}$$

- **Repaso del cálculo de $e^{\mathcal{A}t}$ con $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$**

  - $\mathcal{J}$ $\dashrightarrow$ una forma canónica de Jordan de la matriz $\mathcal{A}$
  - $\mathcal{P}$ $\dashrightarrow$ una matriz de paso asociada a $\mathcal{J}$.

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{J}\mathcal{P}^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathcal{A}t} = \mathcal{P}e^{\mathcal{J}t}\mathcal{P}^{-1}$$

Para el cálculo de $e^{\mathcal{J}t}$ deben tenerse en cuenta:

- Si $\mathcal{J}$ queda subdividida en l cajas en la forma

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & & \\ & \mathcal{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{J}_l \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathcal{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\mathcal{J}_1 t} & & & \\ & e^{\mathcal{J}_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mathcal{J}_l t} \end{pmatrix}$$

- **Repaso del cálculo de $e^{\mathcal{A}t}$ con $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$**

  - Si la caja $\mathcal{J}_i$, $i = 1, \ldots, l$, es diagonal,

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{J}_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathcal{J}_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & & & \\ & e^{\lambda_i t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

(r_i columnas; $\lambda_i I_{r_i}$; $= e^{\lambda_i t} \cdot I_{r_i}$)

4.4 SEDOs lineales de coeficientes constantes

- Si la caja $\mathcal{J}_i$, $i = 1, \ldots, l$, es de la forma

$$\mathcal{J}_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r_i \times r_i}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\mathcal{J}_i t} := e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{t}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & \frac{t}{1!} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{t}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \cdots & \frac{t}{1!} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r_i \times r_i}$$

Example (Problema 1 - Hoja 4A)

Demuéstrese que si $\bar{\varphi}(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ es un vector solución de un sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes, entonces $\bar{\varphi}'(t) \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ también es vector solución de dicho sistema.

Example (Problema 2 - Hoja 4A)

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = -2x + 3y + e^t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hállese la solución particular que pasa por el punto $(t_0; x_0, y_0) = (0; 1, 2)$.

$-\lambda(3-\lambda)+2=0$

$\lambda^2-3\lambda+2=0$

$\lambda = 1, 2$