

COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Tema 3: Resolución de EDOs y PVIs por Transformada de Laplace

ECUACIONES DIFERENCIALES

Dpto. de Matemática Aplicada
Escuela Técnica Superior de Ingeniería - ICAI
Universidad Pontificia Comillas

Objetivos a cubrir

Una vez finalizado el tema, el alumno:

- Conocerá la definición de la Transformada de Laplace de una función y sabrá aplicar con agilidad y soltura las principales propiedades operativas de ésta, pudiendo así calcular la Transformada de Laplace de una función dada.
- Dominará la técnica de resolución de EDOs lineales basada en la aplicación de la Transformada de Laplace.
- Conocerá las ventajas de la aplicación de la Transformada de Laplace en la resolución de ciertos tipos de EDOs lineales, frente a las limitaciones que ofrecen otros métodos alternativos ya estudiados.
- Conocerá una gran variedad de problemas del campo de la física y la ingeniería modelados en términos de EDOs lineales, que son resueltos por aplicación de la Transformada de Laplace.

Bibliografía del tema

Los contenidos del tema pueden ser seguidos por:

- Transparencias de clase
- Capítulo 3 de *Ecuaciones Diferenciales y en Derivadas Parciales (Apuntes del curso 2015/16 en el Portal de Recursos)*, Cano Casanova, S. y Jiménez Casas, A.
- Hoja 3A y Hoja 3B de problemas de la asignatura
- *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría y Problemas. Métodos exactos, métodos numéricos, estudio cualitativo*. De la Villa Cuenca, A., López de la Rica, A. y otros autores. CLAGSA, 2006.

Índice de contenidos

- Definición de Transformada de Laplace y ejemplos básicos
- Propiedades de la Transformada de Laplace
- Tabla de transformadas básicas de Laplace
- Transformadas de Laplace de funciones a trozos
- Cálculo de transformadas inversas de Laplace.
- Aplicaciones de la Transformada de Laplace:
  - ✓ Resolución de EDOs y SEDOs lineales (principalmente con términos independientes que sean funciones a trozos)
  - ✓ Problemas de sistemas masa-resorte
  - ✓ Circuitos eléctricos RL, RLC y multimalla en serie
  - ✓ Cálculo de la flexión de una viga

Definición

Sea $f : [0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}$. *Se define la Transformada de Laplace de la función* $f(t)$ *como la función*

$$F(s) := \mathfrak{L}[f(t)](s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\,,$$

definida para aquellos valores de $s \in \mathbb{R}$ *para los que* $F(s)$ *es convergente.*
Se dirá que $f(t)$ *es la Transformada inversa de Laplace de* $F(s)$ *y se denotará por* $\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *es decir,*

$$\mathfrak{L}[f(t)] = F(s) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)]$$

¿Para qué sirve en EDOs?

- **Transformada de la derivada de una función:** (lo veremos después)

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = s\mathfrak{L}[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$
$$\mathfrak{L}[f''(t)] = \mathfrak{L}[(f'(t))'] = \cdots = s^2F(s) - f(0)s - f'(0)$$

Dada la ecuación $y'' - 5y' + 6y = 0$ con $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

sea $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$

Entonces

$$0 = \mathcal{L}(y'' - 5y' + 6y) = \mathcal{L}(y'') - 5\mathcal{L}(y') + 6\mathcal{L}(y) \Rightarrow$$

$$(s^2Y(s) - s) - 5(sY(s) - 1) + 6Y(s) = 0$$

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) - s + 5 = 0 \qquad Y(s) = \frac{s-5}{s^2-5s+6}$$

$$Y(s) = \frac{s-5}{s^2-5s+6} = \frac{s-5}{(s-2)(s-3)} = \frac{3}{s-2} + \frac{-2}{s-3}$$

f. simples

$y(t) = ??$

$$y(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)$$

Sabemos que $y(t)$ es c. lineal de e^{2t}, e^{3t}

así que sólo falta comprobar que

$$\mathcal{L}(e^{at}) = ??$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\,dt =$$

λ = real

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} e^{(a-s)t}\,dt = \lim_{M\to\infty} \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}\right]_0^{M} =$$

(R. Barrow)

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{a-s}\left(e^{(a-s)M} - 1\right) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{a-s}\left(e^{aM} \cdot e^{-sM} - 1\right) = \frac{1}{s-a}$$

$s>0, M>0$

¿Y las de la forma $e^{at}\begin{cases}\cos bt\\ \operatorname{sen} bt\end{cases}$?

Example (Problema 1 - Hoja 3A)

Hállense $\mathfrak{L}[e^{at}cos(bt)]$ y $\mathfrak{L}[e^{at}sen(bt)]$

Solución:

$$\int_0^\infty e^{at}cos(bt)e^{-st}\,dt + i\int_0^\infty e^{at}sen(bt)e^{-st}\,dt =$$

$$\int_0^\infty e^{at}(cos(bt)+isen(bt))e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{at}e^{ibt}e^{-st}\,dt =$$

$$\int_0^\infty e^{(a-s+ib)t}\,dt = \frac{1}{a-s+ib}\left[e^{(a-s+ib)t}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{-1}{(a-s)+ib} =$$

$$\frac{1}{(s-a)-ib}\ \frac{(s-a)+ib}{(s-a)+ib} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} + i\ \frac{b}{(s-a)^2+b^2},\quad s>a$$

Así tenemos que

$$\mathfrak{L}[e^{at}cos(bt)] = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \qquad \mathfrak{L}[e^{at}sin(bt)] = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\Downarrow$$

Casos particulares (Problema 1 - Hoja 3A)

- $a = 0 \Rightarrow \mathfrak{L}[cos(bt)] = \frac{s}{s^2+b^2}$, $\mathfrak{L}[sin(bt)] = \frac{b}{s^2+b^2}$
- $b = 0 \Rightarrow \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$
- $a = 0$ y $b = 0 \Rightarrow \mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s}$

¿Dónde nos falta?

Example (Problema 1 - Hoja 3A)

Hállese $\mathfrak{L}[t^\alpha]$, para $\alpha > -1$.

Solución:

$$\mathfrak{L}[t^\alpha](s) = \int_0^\infty t^\alpha\, e^{-st}\, dt \overset{u=st}{=} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \frac{1}{s}\, du$$

$$= \int_0^\infty e^{-u}\, u^\alpha\, \frac{1}{s^{\alpha+1}}\, du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u}\, u^\alpha\, du$$

$$\boxed{\mathfrak{L}[t^\alpha](s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\ \alpha > -1}$$

¿Qué nos falta?

⋆ **Observación:** Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\mathfrak{L}[t^n](s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

3.2 Propiedades de la Transformada de Laplace

- **Notación:**

$$\mathfrak{L}[f(t)] = F(s) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)]$$
$$\mathfrak{L}[g(t)] = G(s) \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = \mathfrak{L}^{-1}[G(s)]$$

- **Linealidad:**

$$\mathfrak{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

- **Traslación:**

polinomios $\rightarrow \mathfrak{L}(t^n e^{at}) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$$\mathfrak{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a), \quad a \in \mathbb{R}$$

En palabras: escribe la transformada de f y cambia s por $s-a$.

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = e^{at} f(t)$$

- **Traslación:**

$$\mathfrak{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{at}\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(s-a)t}\, dt = F(s-a)$$

- **Transformada de la derivada de una función:**

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = s\mathfrak{L}[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$
$$\mathfrak{L}[f''(t)] = \mathfrak{L}[(f'(t))'] = \cdots = s^2F(s) - f(0)s - f'(0)$$
$$\mathfrak{L}[f'''(t)] = \mathfrak{L}[(f''(t))'] = \cdots = s^3F(s) - f(0)s^2 - f'(0)s - f''(0)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\mathfrak{L}[f^{n)}(t)] = \cdots = s^nF(s) - f(0)s^{n-1} - \cdots - f^{n-1)}(0)$$

Supongamos que $F(s)$ existe y que f es derivable.

Basta con la primera $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0)$

Transformada de la derivada

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = s\mathfrak{L}[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

$$\int_{t=0}^{\infty} f'(t)\, e^{-st}\, dt = \Big[f(t)\, e^{-st} \Big]_{t=0}^{\infty} + s \int_{t=0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

partes

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ v' = f'(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = -s\, e^{-st} \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$-f(0)\, e^{-s0} + \lim_{t \to \infty} f(t)\, e^{-st}$$

¿Por qué es 0 este límite?

- **Transformada del producto por t^n, $n \in \mathbb{N}$:** Derivada de la transformada

$$\mathfrak{L}[t^n f(t)](s) := (-1)^n F^{n)}(s), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-ts}\,dt \Rightarrow F'(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{\int_0^\infty f(t)\left(e^{-ts} - e^{-ts_0}\right)dt}{s - s_0}$$

(un poco de magia negra)

$$= \lim_{s \to s_0} \int_0^\infty f(t)\, e^{-ts_0} \frac{\left(e^{-t(s-s_0)} - 1\right)}{s - s_0}\,dt = \int_0^\infty f(t) e^{-ts_0} \lim_{s \to s_0} \frac{e^{-t(s-s_0)} - 1}{s - s_0}\,dt = \int_0^\infty -t f(t) e^{-s_0 t}\,dt = -\mathcal{L}(t f(t))$$

Y ahora $\mathcal{L}(t^2 f(t)) = \mathcal{L}(t \cdot t f(t)) = -1\left(\mathcal{L}[t f(t)](s)\right)' =$

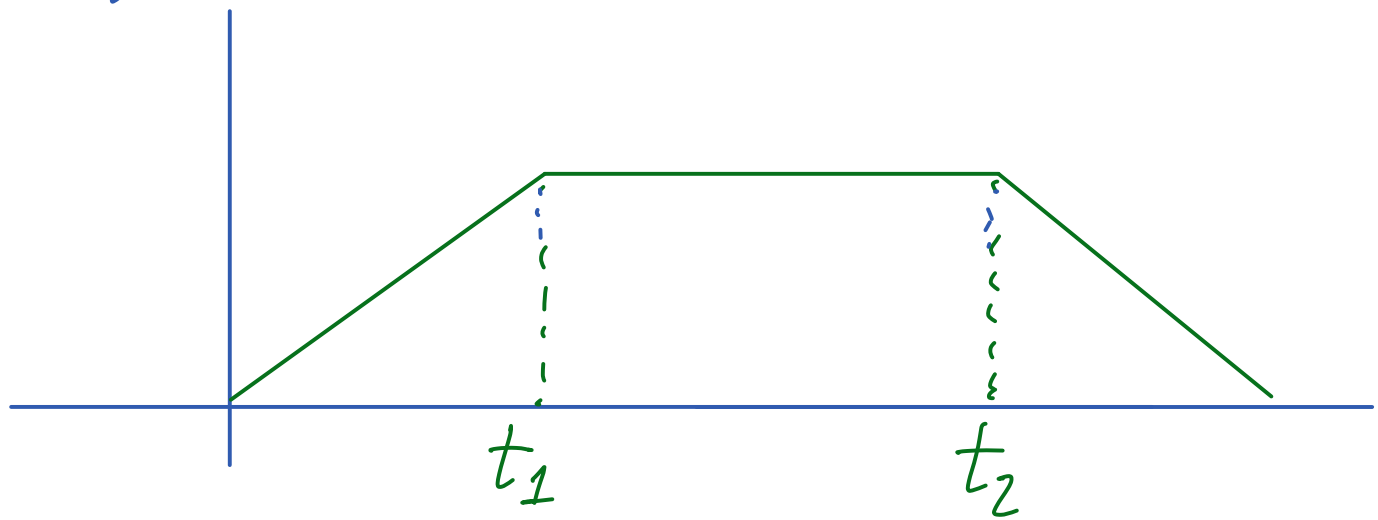
$= (-1)^2 \left(F'(s)\right)' = (-1)^2 F''(s)$ etc.

¿Qué aporta $\mathcal{L}$ que no supiéramos hacer ya?

Supongamos que quiero resolver:

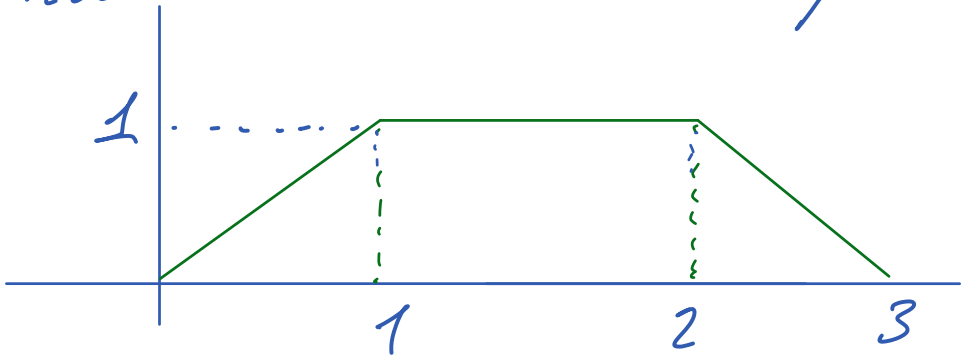
$y'' - 5y' + 6y = f(t)$ donde

$f(t)$ es

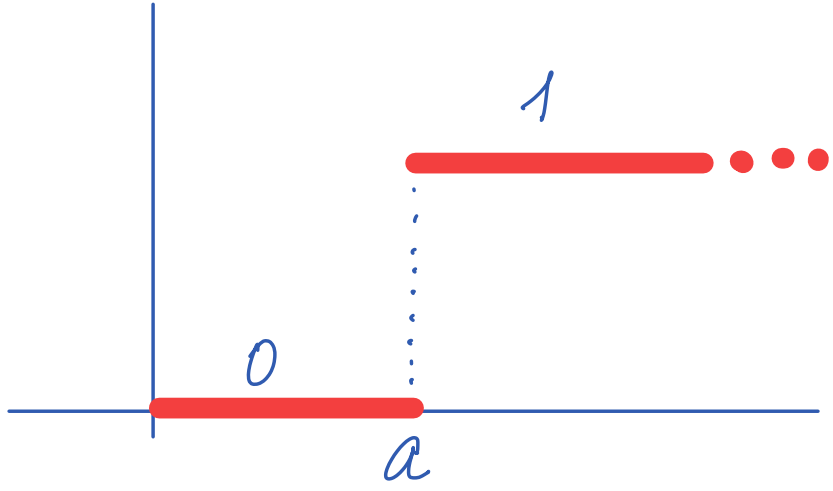


Los métodos que hemos visto no sirven.

Funciones como esta se dejan escribir

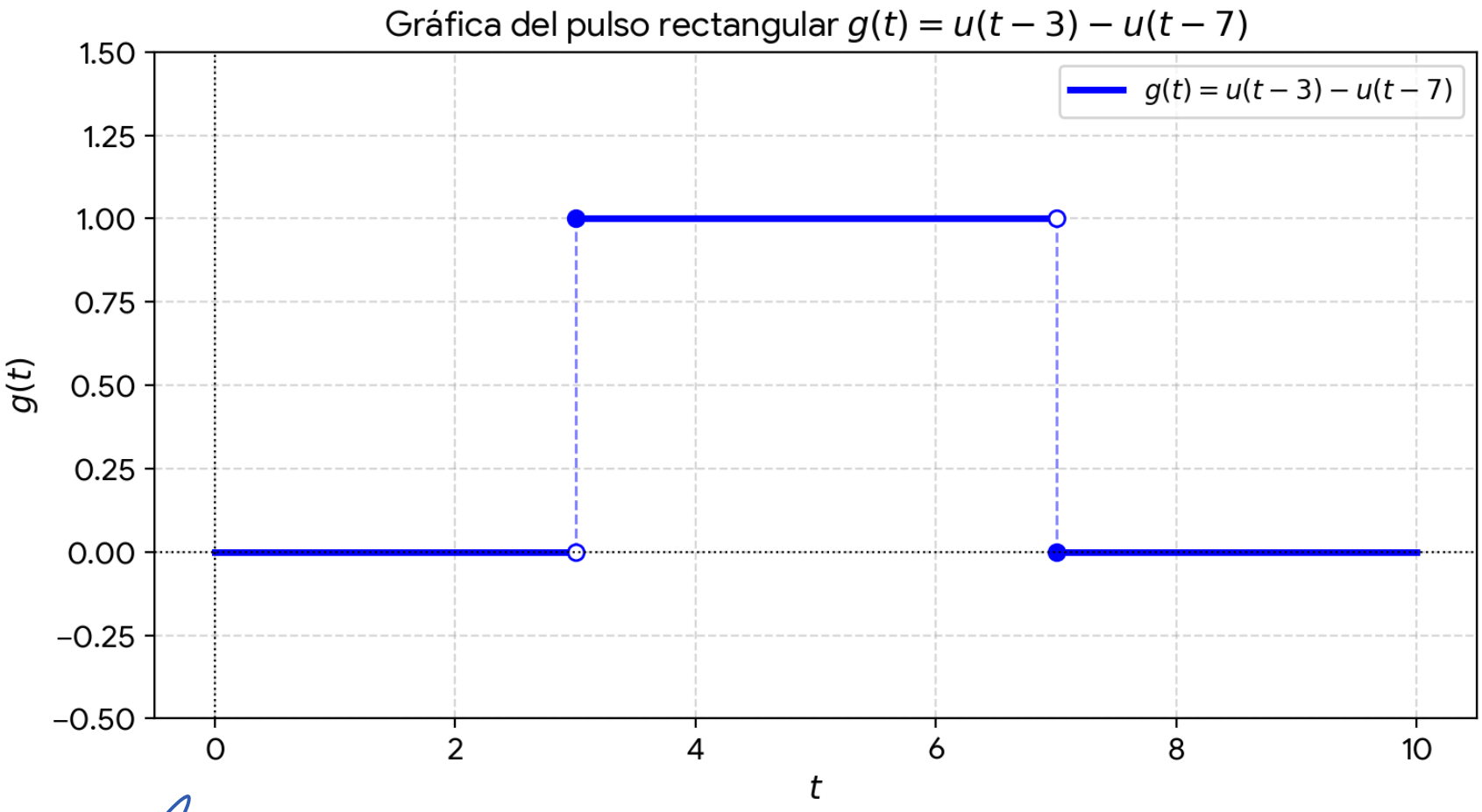


en términos de la función escalón de Heaviside:



$$u(t)=\begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t\geq a \end{cases}$$

¿Cómo es $u(t-3)-u(t-7)$?



- Esto permite definir funciones por tramos.
- Ejercicio: define la función trapezoidal de la página anterior usando escalones.

Example (Problema 1 - Hoja 3A)

Hállese $\mathfrak{L}[H(t-a)]$ donde $H(t-a)$ es la función de Heaviside definida para cada $a \geq 0$ por

$$H(t-a) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Solución:

$\rightarrow \mathcal{L}(H(t)) = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$ por tanto...

$$\mathfrak{L}[H(t-a)] = \int_0^\infty H(t-a)e^{-st}\,dt = \int_0^a 0\,dt + \int_a^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=a}^{t=\infty} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathfrak{L}[H(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0}$$

¿Qué sucede si queremos hacer un pulso instantáneo?

Example (Problema 1 - Hoja 3A)

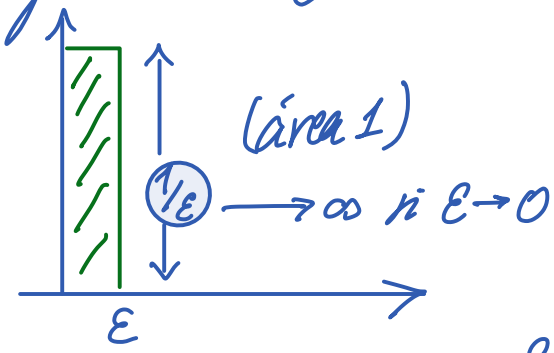
Hállese $\mathfrak{L}[\delta(t)]$, donde $\delta(t)$ es la *Delta de Dirac* definida por

$$\delta(t) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \delta_\epsilon(t)\,,$$

donde para cada $\epsilon > 0$,

$$\delta_\epsilon(t) := \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{si} \quad t > \epsilon \end{cases}$$

Gráfica de $\delta_\varepsilon(t)$



Así que $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{¿}\infty\text{?} & t = 0 \end{cases}$

No es una función es una distribución

$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = ??$

$$\mathcal{L}[\delta_\varepsilon(t)](s) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-st}\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{\varepsilon} = \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon}$$

Y pasando al límite con $\varepsilon \to 0$

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{L}[\delta_\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{s}\cdot s = 1$$

Así que $\mathcal{L}[\delta(t)](s) = 1$. En particular la $\delta[t]$ sirve para hacer la antitransformada de constantes.