



COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA

ICAI

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Tema 2: Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden genérico

ECUACIONES DIFERENCIALES

Dpto. de Matemática Aplicada
Escuela Técnica Superior de Ingeniería - ICAI
Universidad Pontificia Comillas

Objetivos a cubrir

Una vez finalizado el tema, el alumno:

- Conocerá la terminología básica y los principales resultados teórico-prácticos relativos a ecuaciones diferenciales lineales.
- Manejará con fluidez y soltura las principales técnicas de estudio y resolución de éstas.
- Conocerá algunas de las muchas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales a problemas del campo de la física y la ingeniería.

Los contenidos del tema pueden ser seguidos por:

- Transparencias de clase
- Capítulo 2 de *Ecuaciones Diferenciales y en Derivadas Parciales (Apuntes en el Portal de Recursos)*, Cano Casanova, S. y Jiménez Casas, A.
- Hoja 2A y Hoja 2B de problemas de la asignatura
- *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría y Problemas. Métodos exactos, métodos numéricos, estudio cualitativo.* De la Villa Cuenca, A., López de la Rica, A. y otros autores. CLAGSA, 2006.

Índice de contenidos

- Introducción a ecuaciones diferenciales (EDOs) lineales de orden genérico
 - ✓ Definiciones previas
 - ✓ Problemas de valor inicial en EDOs lineales
- EDOs lineales homogéneas
- EDOs Lineales completas
 - ✓ Estructura del conjunto de soluciones
 - ✓ Método de Variación de Constantes
 - ✓ Principio de Superposición de Soluciones
- EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes
- EDOs lineales completas de coeficientes constantes
 - ✓ Resultados generales
 - ✓ Método de Coeficientes Indeterminados
- Aplicaciones de EDOs lineales (de segundo orden)
 - ✓ Sistemas masa-resorte
 - ✓ Circuitos eléctricos RLC
 - ✓ Comparativa de modelos

2.1 Introducción a EDOs lineales de orden genérico

■ Definiciones previas

Definición

Se denomina *EDO lineal de orden n* , a toda EDO de la forma

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t),$$

con $t \in \mathcal{I}$, donde:

- $\mathcal{I} \dashrightarrow$ intervalo de trabajo
- $a_i(t) : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R} \dashrightarrow$ coeficientes de la EDO
- $f(t) : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R} \dashrightarrow$ término independiente de la EDO
- $y(t) \dashrightarrow$ función incógnita.

2.1 Introducción a EDOs lineales de orden genérico

■ Definiciones previas

Definición

Sea la EDO lineal de orden n

$$y^n(t) + a_{n-1}(t)y^{n-1}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

Se dice que es una:

- EDO lineal **homogénea** de orden n , si $f(t) \equiv 0$,
- EDO lineal **completa** de orden n , si $f(t) \neq 0$
- EDO lineal de **coeficientes constantes**, si todas las funciones $a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ son funciones constantes, es decir, si

$$a_i(t) = a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

2.1 Introducción a EDOs lineales de orden genérico

■ Definiciones previas

★ Notaciones:

- $L[y] = f(t)$

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t)$$

- $y_G^H(t) \dashrightarrow$ solución general de $L[y] = 0$
- $y_G^C(t) \dashrightarrow$ solución general de $L[y] = f(t)$
- $y_P^C(t) \dashrightarrow$ solución particular de $L[y] = f(t)$

★ Observaciones:

- Más adelante se verá que la solución general de una EDO lineal de orden n depende de n constantes arbitrarias $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$
- El operador diferencial $L[y]$ es **lineal en y** , ya que:

$$L[\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)] = \alpha L[y_1(t)] + \beta L[y_2(t)], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2.1 Introducción a EDOs lineales de orden genérico

■ Problemas de Valor Inicial en EDOs Lineales

Definition

Se denomina *Problema de Valor Inicial (PVI)* para una EDO lineal de orden n , a todo problema de la forma

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = f(t), t \in (t_1, t_2) \\ y(t_0) = y_0^0, y'(t_0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}^0 \end{cases}$$

con $y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{R}$ y $t_0 \in [t_1, t_2]$

★ Resolución:

- Solución general de $L[y] = f(t)$ que dependerá de n constantes arbitrarias $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$
- Ajuste de constantes $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ de la solución general

2.1 Introducción a EDOs lineales de orden genérico

■ Problemas de valor inicial en EDOs lineales

Teorema (Existencia y unicidad de soluciones de PVI)

Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = f(t), t \in (t_0, t_1) \\ y(t_0) = y_0^0, y'(t_0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}^0 \end{cases}$$

Si $a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ y $f(t)$ son funciones continuas en un entorno de t_0 , existe $\delta > 0$ tal que PVI tiene una única solución $\varphi(t)$ en $[t_0, t_0 + \delta)$

2.2 EDOs lineales homogéneas

Sea la EDO lineal homogénea de orden n ,

$$L[y] = 0$$

y supongamos que:

- $y_1(t)$ es solución de $L[y] = 0 \Rightarrow L[y_1(t)] = 0$
- $y_2(t)$ es solución de $L[y] = 0 \Rightarrow L[y_2(t)] = 0$

$$\Downarrow \quad \text{linealidad de } L[y] \quad \Downarrow$$

$$L[\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)] = \alpha L[y_1(t)] + \beta L[y_2(t)] = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad \text{es solución de } L[y] = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\text{Soluciones de } L[y] = 0\} \Rightarrow \text{Espacio Vectorial} \quad \dashrightarrow \quad \text{dimensión ?}$$

2.2 EDOs lineales homogéneas

Teorema (Estructura del conjunto de soluciones)

El conjunto de soluciones de la EDO lineal homogénea de orden n , $L[y] = 0$, tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n . Por ello, si

$$\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$$

es una base de dicho espacio vectorial de soluciones, entonces

$$y_G^H(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t) = \Phi(t) \bar{C}$$

$$\Phi(t) := (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \mathcal{M}_{1 \times n}, \quad \bar{C} := \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

2.2 EDOs lineales homogéneas

Definición

Sea la EDO lineal homogénea de orden n , $L[y] = 0$. Se denomina:

- *Sistema fundamental de soluciones* de la EDO, a todo conjunto de n soluciones $\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ que constituya una base del esp. vect. de soluciones de ésta.
- *Matriz fundamental* de la EDO, a toda matriz

$$\Phi(t) := (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \mathcal{M}_{1 \times n}$$

cuyas componentes constituyan un sistema fundamental de soluciones de la EDO. En este caso

$$y_G^H(t) = \Phi(t)\bar{C}, \quad \bar{C} \in \mathcal{M}_{n \times 1}$$

2.2 EDOs lineales homogéneas

Definición

Sean $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ soluciones de la EDO lineal homogénea de orden n , $L[y] = 0$. Se definen:

- La **Matriz Wronskiana** asociada a las anteriores soluciones, como la matriz cuadrada de orden n definida por:

$$W(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_{n-1}(t) & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_{n-1}'(t) & y_n'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & \dots & y_{n-1}''(t) & y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(t) & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

- El **Wronskiano** como $|W(t)|$

2.2 EDOs lineales homogéneas

★ Objetivo:

$y_1, y_2, \dots, y_n$ soluciones de $L[y] = 0 \Rightarrow$ Sistema fundamental ?

Teorema (Caracterización de sist. fundamentales)

Sean $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ soluciones de la EDO lineal homogénea de orden n , $L[y] = 0$ y $W(t)$ su matriz wronskiana asociada. Se verifica que

- $|W(t)| = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I} \quad \text{ó} \quad |W(t)| \neq 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}$
- $\mathfrak{B} = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ constituye un **sistema fundamental de soluciones de $L[y] = 0$** $\Leftrightarrow |W(t)| \neq 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}$

★ Observación: Si $\Phi(t) := (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ es una matriz fundamental de $L[y] = 0$ y $W(t)$ es su matriz wronskiana asociada, entonces existe $W^{-1}(t)$.

2.3 EDOs lineales completas

■ Estructura del conjunto de soluciones

Sea la EDO lineal completa de orden n , $L[y] = f(t)$ y supongamos que:

- $y_1(t)$ es solución de $L[y] = f(t) \Rightarrow L[y_1(t)] = f(t)$
- $y_2(t)$ es solución de $L[y] = f(t) \Rightarrow L[y_2(t)] = f(t)$

$\Downarrow$ linealidad de $L[y] \Downarrow$

$$L[y_1(t) - y_2(t)] = L[y_1(t)] - L[y_2(t)] = f(t) - f(t) = 0$$

$\Downarrow$

$$y_1(t) - y_2(t) \text{ es solución de } L[y] = 0$$

$\Downarrow$ Punto 1 = Punto 2 + vector $\Downarrow$

$$y_G^c(t) = y_G^H(t) + y_P^c(t) = \Phi(t)\bar{C} + y_P^c(t)$$

$\{\text{Soluciones de } L[y] = f(t)\} \Rightarrow$ **espacio afín de dimensión n**

2.3 EDOs lineales completas

■ Estructura del conjunto de soluciones

Teorema

*El conjunto de soluciones de una EDO lineal completa de orden n , $L[y] = f(t)$ tiene estructura de **espacio afín** de **dimensión n** con espacio vectorial asociado, el espacio vectorial de soluciones de la EDO lineal homogénea asociada $L[y] = 0$. Por ello*

$$y_G^c(t) = y_G^H(t) + y_P^c(t) = \Phi(t)\bar{C} + y_P^c(t),$$

donde:

- $\Phi(t) \in \mathcal{M}_{1 \times n}$ es una **matriz fundamental** de la EDO lineal homogénea asociada $L[y] = 0$
- $\bar{C} := (C_i)_{i=1}^n \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ es un vector de constantes arbitrarias, con $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$
- $y_P^c(t)$ solución particular de $L[y] = f(t)$

CASO DE COEFICIENTES CTS.

¿Cómo se construye un sistema fundamental de soluciones en el caso de una ec. homogénea de coef. constantes?

2.4 EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes

Definición (Polinomio característico)

Sea la EDO lineal homogénea de coeficientes constantes

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

con $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Se define el **Polinomio Característico** asociado a dicha EDO, como el polinomio $P(\lambda)$ de grado n definido por

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

★ Objetivo:

Raíces de $P(\lambda)$ $\longleftrightarrow$ Soluciones de $L[y] = 0$?



Matriz fundamental $\Phi(t)$ de $L[y] = 0$?

2.4 EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes

Teorema (Parte I: Raíces reales)

Sea $P(\lambda)$ el polinomio característico de la EDO lineal homogénea de coeficientes constantes $L[y] = 0$. Entonces:

- Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ es raíz *real simple* de $P(\lambda)$, entonces $e^{\lambda_0 t}$ es solución de $L[y] = 0$.
- Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ es raíz *real múltiple* de $P(\lambda)$ con *multiplicidad* k , entonces

$$e^{\lambda_0 t}, t e^{\lambda_0 t}, t^2 e^{\lambda_0 t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda_0 t},$$

son k soluciones independientes de $L[y] = 0$.

2.4 EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes

Teorema (Parte II: Raíces complejas)

Sea $P(\lambda)$ el polinomio característico de la EDO lineal homogénea de coeficientes constantes $L[y] = 0$. Entonces:

- Si $\lambda_0 = a \pm ib \in \mathbb{C}$ son raíces *complejas conjugadas simples* de $P(\lambda)$, entonces

$$e^{at}\sin(bt), \quad e^{at}\cos(bt)$$

son dos soluciones independientes de $L[y] = 0$.

- Si $\lambda_0 = a \pm ib \in \mathbb{C}$ son raíces *complejas conjugadas múltiples* de $P(\lambda)$ con *multiplicidad* k , entonces

$$e^{at}\sin(bt), t e^{at}\sin(bt), \dots, t^{k-1} e^{at}\sin(bt),$$

$$e^{at}\cos(bt), t e^{at}\cos(bt), \dots, t^{k-1} e^{at}\cos(bt),$$

son $2k$ soluciones independientes de $L[y] = 0$.

2.4 EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes

Teorema (Parte III)

Sea $P(\lambda)$ el polinomio característico de la EDO lineal homogénea de coeficientes constantes $L[y] = 0$. Entonces:

- Las soluciones de los apartados anteriores asociadas a raíces diferentes de $P(\lambda)$ son independientes entre sí.



Raíces de $P(\lambda)$ $\Rightarrow$ Matriz fundamental $\Phi(t)$ de $L[y] = 0$

$$y_G^H(t) = \Phi(t)\bar{C}, \quad \bar{C} := \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

2.4 EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes

Example (Problema 1 - Hoja 2A)

Hállese la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y^{iv} - y'' = 0$

b) $y^{iv} + y''' + y'' = 0$

c) $y^v + 5y^{iv} + 5y''' + y'' + 6y' - 18y = 0$

Example (Problema 2** - Hoja 2A)

Se pide: a) Determinar la ecuación diferencial lineal completa de coeficientes constantes y orden mínimo que admite como soluciones a las funciones $\varphi_1(t) = ch^2(t)$ y $\varphi_2(t) = \operatorname{sen}^2(t)$.

b) Hallar la solución general de la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior.

c) Obtener la solución de la ecuación diferencial del apartado a) que es periódica y tiene por recta tangente en el punto $(0, y(0))$ a la recta $y = t - 3$.

2.4 EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes

Hasta aquí el día 2026-09-25

Ejercicios (de Hoja 2B)

- *Problema 1*
- *Problema 2*
- *Problema 3*

2.5 EDOs lineales completas de coeficientes constantes

■ Resultados generales

Sea la EDO lineal completa de orden n y coeficientes constantes $L[y] = f(t)$. Por lo visto anteriormente

$$y_G^c(t) = y_G^H(t) + y_P^c(t) = \Phi(t)\bar{C} + y_P^c(t)$$

- $\Phi(t) \in \mathcal{M}_{1 \times n}$ es una matriz fundamental de $L[y] = 0$
- $\bar{C} \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ es un vector de constantes arbitrarias
- $y_P^c(t)$ solución particular de $L[y]=f(t)$.

Métodos de cálculo de $y_P^c(t)$:

- Método de Variación de Constantes $\rightarrow$ válido para EDOs lineales completas de coeficientes variables o constantes.
- **Métodos de Coeficientes Indeterminados** $\rightarrow$ válido únicamente para (algunas) EDOs lineales completas de **coeficientes constantes**

2.3 EDOs lineales completas

■ Principio de Superposición de Soluciones

Además podemos usar esto para "dividir y vencerás".

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t)$$

Teorema

Sean

- $y_1(t)$ solución de la EDO lineal completa $L[y] = f_1(t)$ e
- $y_2(t)$ solución de la EDO lineal completa $L[y] = f_2(t)$

Entonces

$$y(t) := \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

es solución de

$$L[y] = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Método de variación de las constantes

Ejemplo preliminar

Ejemplo: $y'' + y = \sec x$

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Busco $y_p = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x$

$$y_p' = C_1' \sin x + C_2' \cos x + C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

Impongo que sea 0

$$y_p'' = C_1' \cos x - C_2' \sin x + C_1 (-\sin x) - C_2 \cos x$$

Impongo que sea $\sec x$

$$C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0$$

$$C_1' \cos x - C_2' \sin x = \sec x$$

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0 & \begin{matrix} 1^\circ: \sin x \\ 2^\circ: \cos x \end{matrix} \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \sec x \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = x \Rightarrow C_2' = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$C_2 = \ln|\cos x| \Rightarrow y_p = x \cdot \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|$$

Comprovação:

$$y_p' = \sin x + x \cos x - \sin x \ln(\cos x) - \sin x = x \cos x - \sin x \ln(\cos x)$$

$$y_p'' = \cos x - x \sin x - \cos x \ln(\cos x) + \frac{\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$y_p'' + y_p' = \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Lo que hemos hecho es, dada $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ con $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$
 buscar $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$.

Tenemos $y_p' = \underbrace{c_1' y_1 + c_2' y_2}_0 + c_1 y_1' + c_2 y_2'$ }

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= f \end{aligned}$$
 Wronskiano

$y_p'' = \underbrace{c_1' y_1' + c_2' y_2'}_{f(x)} + c_1 y_1'' + c_2 y_2''$

luego $y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p = f(x) + \underbrace{c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_0(c_1 y_1 + c_2 y_2)}_{=0 \text{ "por linealidad"}} = f(x)$

En general $c_1, \dots, c_k \leftarrow$
 son solución de
$$W \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \int \left(W^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \right) dx$$

2.3 EDOs lineales completas

■ Fórmula de Variación de Constantes

★ Objetivo: $\Phi(t)$ matriz fundamental de $L[y] = 0 \dashrightarrow y_p^c(t)$?

Teorema (Fórmula de Variación de Constantes)

Sean la EDO lineal completa de orden n , $L[y] = f(t)$ y

- $\Phi(t)$ una matriz fundamental de la EDO lineal homogénea asociada $L[y] = 0$
- $W(t)$ la matriz wronskiana asociada a $\Phi(t)$.

Se verifica que una solución particular $y_p^c(t)$ de $L[y] = f(t)$ viene dada por

$$y_p^c(t) := \Phi(t) \int W^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt$$

2.3 EDOs lineales completas

■ Fórmula de Variación de Constantes:

Corolario

Sean la EDO lineal completa de orden n , $L[y] = f(t)$ y

- $\Phi(t)$ una matriz fundamental de la EDO lineal homogénea asociada $L[y] = 0$
- $W(t)$ la matriz wronskiana asociada a $\Phi(t)$.

Se verifica que una expresión de $y_G^c(t)$ es

$$y_G^c(t) := \Phi(t) \left[\bar{C} + \int W^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt \right]$$

donde $\bar{C} := (C_i)_{i=1}^n \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ es un vector de constantes arbitrarias, con $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

2.5 EDOs lineales completas de coeficientes constantes

■ Método de Coeficientes Indeterminados

Teorema (Método de Coeficientes Indeterminados - Parte I)

Sea la EDO lineal completa de orden n y *coeficientes constantes*

$$L[y] = f(t)$$

y $P(\lambda)$ el polinomio característico de la EDO lineal homogénea asociada $L[y] = 0$. Entonces:

- Si $f(t) = Q_m(t)$ donde $Q_m(t)$ es un polinomio de grado m , entonces:
 - Si $\lambda = 0$ no es raíz de $P(\lambda) \Rightarrow y_p^c(t) = Q_m^*(t)$
 - Si $\lambda = 0$ es raíz de $P(\lambda)$ con *multiplicidad* $k \Rightarrow y_p^c(t) = t^k Q_m^*(t)$

donde $Q_m^*(t)$ es un cierto polinomio de grado m a determinar.

2.5 EDOs lineales completas de coeficientes constantes

■ Método de Coeficientes Indeterminados

Teorema (Método de Coeficientes Indeterminados - Parte II)

Sea la EDO lineal completa de orden n y coeficientes constantes

$$L[y] = f(t)$$

y $P(\lambda)$ el polinomio característico de la EDO lineal homogénea asociada $L[y] = 0$. Entonces:

- *Si $f(t) = e^{at} Q_m(t)$ donde $Q_m(t)$ es un polinomio de grado m , entonces:*
 - *Si $\lambda = a$ no es raíz de $P(\lambda) \Rightarrow y_p^c(t) = e^{at} Q_m^*(t)$*
 - *Si $\lambda = a$ es raíz de $P(\lambda)$ con multiplicidad $k \Rightarrow$
 $y_p^c(t) = t^k e^{at} Q_m^*(t)$*

donde $Q_m^(t)$ es un cierto polinomio de grado m a determinar.*

2.5 EDOs lineales completas de coeficientes constantes

■ Método de Coeficientes Indeterminados

Teorema (Método de Coeficientes Indeterminados - Parte III)

Sea la EDO lineal completa de orden n y coeficientes constantes $L[y] = f(t)$ y $P(\lambda)$ el polinomio característico de la EDO lineal homogénea asociada $L[y] = 0$. Entonces:

- Si $f(t) = e^{at}(Q_m(t)\cos(bt) + R_l(t)\sin(bt))$ donde $Q_m(t)$ y $R_l(t)$ son polinomios de grado m y l , respectivamente, entonces:
 - Si $\lambda = a \pm ib$ no son raíces de $P(\lambda) \Rightarrow$
 $y_P^c(t) = e^{at}(Q_M^*(t)\cos(bt) + R_M^*(t)\sin(bt))$
 - Si $\lambda = a \pm ib$ son raíces de $P(\lambda)$ con multiplicidad $k \Rightarrow$
 $y_P^c(t) = t^k e^{at}(Q_M^*(t)\cos(bt) + R_M^*(t)\sin(bt))$

donde $M = \max\{m, l\}$ y $Q_M^*(t)$ y $R_M^*(t)$ son polinomios de grado M a determinar.

2.5 EDOs lineales completas de coeficientes constantes

■ Método de Coeficientes Indeterminados

Example (Problema 3 - Hoja 2A)

Hállese la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y''' - y = te^{2t}$

b) $y'' + 4y' + 3y = \text{sen}(t)$

c) $y^{iv} - y'' = 2t - 3$

d) $y''' + 4y' = \frac{1}{\cos(2t)}$

2.5 EDOs lineales completas de coeficientes constantes

■ Método de Coeficientes Indeterminados

Example (Problema 4 - Hoja 2A)

Sea $L[y] = \cos(2x)$ la EDO lineal completa de orden mínimo y coeficientes constantes, que verifica que ninguna de sus soluciones está acotada en $x \in \mathbb{R}$ y cuya EDO lineal homogénea asociada admite soluciones constantes y soluciones periódicas. Se pide:

- a) Hallar explícitamente la EDO $L[y] = \cos(2x)$
- b) Hallar la solución general de la ecuación diferencial del apartado a).
- c) Hallar la solución general de la EDO

$$L[y] = \cos(2x) + \frac{1}{\cos(2x)},$$

donde $L[y]$ es el operador diferencial del apartado a).

2.5 EDOs lineales completas de coeficientes constantes

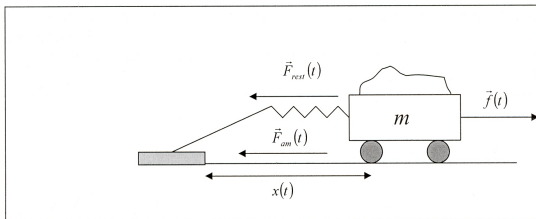
■ Método de Coeficientes Indeterminados

Ejercicios (de Hoja 2B)

- *Problema 3*
- *Problema 5*
- *Problema 6*
- *Problema 7*

2.7 Aplicaciones de EDOs lineales (de segundo orden)

■ Sistemas masa-resorte



- Fuerza restauración del resorte $\rightarrow \vec{F}_{rest}(t) = -kx(t) \vec{i}$
- Fuerza amortiguamiento del medio $\rightarrow \vec{F}_{am}(t) = -\mu x'(t) \vec{i}$
- Fuerza externa $\rightarrow \vec{f}(t) = \text{sen}(\omega t) \vec{i}$
- Ley de Newton $\rightarrow \vec{F}_{rest}(t) + \vec{F}_{am}(t) + \vec{f}(t) = mx''(t) \vec{i}$

$$\begin{cases} mx''(t) + \mu x'(t) + kx(t) = f(t), & t > 0, m > 0, k > 0, \mu \geq 0 \\ x(0) = x_0, & x'(0) = 0 \end{cases}$$

2.7 Aplicaciones de EDOs lineales (de segundo orden)

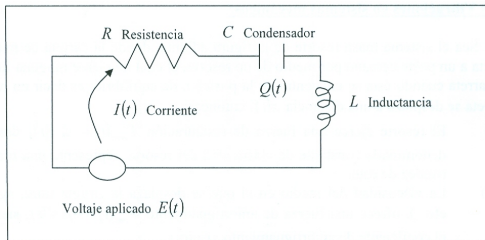
Example (Problema 6 - Hoja 2A)

Sea el sistema masa-resorte de la figura anterior. Hállese la posición $x(t)$ de la carreta en cada instante de tiempo $t > 0$, si en el instante inicial la carreta es desplazada a una distancia x_0 y soltada con velocidad inicial nula, en cada uno de los siguientes casos:

- 1.- Vibraciones libres, cuando $f(t) = 0$, es decir, si $\omega = 0$:
 - a) Vibrac. libres no amortiguadas, es decir, cuando $\mu = 0$
 - b) Vibrac. libres amortiguadas, es decir, cuando $\mu \neq 0$:
 - Caso sobreamortiguado $\rightarrow \mu^2 - 4mk > 0$;
 - Caso críticamente amortiguado $\rightarrow \mu^2 - 4mk = 0$;
 - Caso subamortiguado $\rightarrow \mu^2 - 4mk < 0$;
- 2.- Vibraciones forzadas, cuando $f(t) \neq 0$, es decir, si $\omega \neq 0$.

2.7 Aplicaciones de EDOs lineales (de segundo orden)

■ Circuitos eléctricos RLC, ($Q(t)$, $I(t) = Q'(t)$)



- Caída de potencial resistencia $\rightarrow E_R(t) = R I(t) = R Q'(t)$
- Caída de potencial del condensador $\rightarrow E_C(t) = Q(t) / C$
- Caída de potencial de la malla $\rightarrow E_L(t) = L I'(t) = L Q''(t)$
- Ley de Kirchhoff $\rightarrow E_R(t) + E_C(t) + E_L(t) = E(t)$

$$\begin{cases} L Q''(t) + R Q'(t) + \frac{1}{C} Q(t) = E(t), & t > 0 \\ Q(0) = Q_0, & Q'(0) = I(0) = 0 \end{cases}$$

2.7 Aplicaciones de EDOs lineales (de segundo orden)

■ Circuitos eléctricos RLC [Example: Problema 7 - Hoja 2A]

Sea el circuito RLC anterior. Se pide:

- Demstrar que si $E(t) = 0$ y $R \neq 0$, entonces la carga $Q(t)$ tiende a desaparecer con el paso del tiempo.
- Para el caso en el que $E(t) = \cos(at)$ y $L = C = 1$, hallar justificadamente el valor de la resistencia, $R \geq 0$ y de $a > 0$, para que ninguna solución de dicha ecuación esté acotada en $t \in [0, \infty)$. Determinar para dichos valores la carga $Q(t)$ acumulada en el condensador en todo instante de tiempo t , sabiendo que la carga inicial es nula y que se cierra en el instante $t = 0$ ($I(0) = 0$).
- Para el caso en el que $E(t) = 5 + \frac{12}{1+e^{2t}}$, $L = 1$, $R = 3$ y $C = \frac{1}{2}$, hallar una solución particular de la ecuación diferencial que rige el circuito sabiendo que la carga es nula y que se cierra en el instante $t = 0$.

2.7 Aplicaciones de EDOs lineales (de segundo orden)

■ Circuitos eléctricos RLC Vibraciones en sistemas mecánicos

Ejercicios (de Hoja 2B)

- *Problema 9*

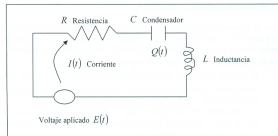
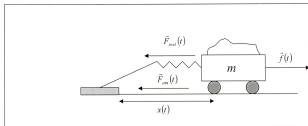
Circuitos eléctricos RLC

Ejercicios (de Hoja 2B)

- *Problemas 10 a 12*

2.7 Aplicaciones de EDOs lineales (de segundo orden)

■ Comparativa de modelos



Sistemas masa-resorte $\Leftrightarrow$ Circuitos eléctricos RLC

$$m x''(t) + \mu x'(t) + k x(t) = f(t), \quad t > 0$$



$$L Q''(t) + R Q'(t) + \frac{1}{C} Q(t) = E(t), \quad t > 0$$