

### Sesión del 2026-09-04

#### Ejercicios (de Hoja 1B)

- *Problema 8b) (Problemas de trayectoria oblicua)*
- *Problema 12 (Problema de movimiento)*
- *Problema 14 (Problema de radiación)*
- *Problemas 15, 16 (Problemas de transferencia de calor)*
- *Problemas 17 – e) (Problemas demográfico)*

#### Ejercicio complementario

*Hállese la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{1}{x^2 - x} + \frac{y'}{y^2 + y} = 0.$$

$$\frac{1}{x^2 - x} + \frac{y'}{y^2 + y} = 0.$$

$$y' = \frac{y^2 + y}{x - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + y} = \frac{dx}{x - x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + y} = \int \frac{A dy}{y + 1} + \int \frac{B dy}{y} = \ln y - \ln(y + 1)$$

$$Ay + B(y + 1) = 1 \Rightarrow B = 1, A = -1$$

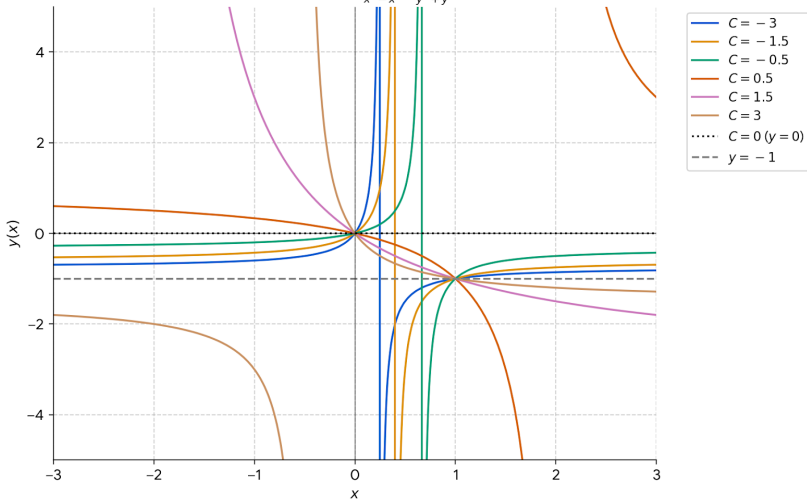
$$\int \frac{A dx}{x} + \int \frac{B dx}{1-x} = \ln x - \ln(1-x) + C = \ln \frac{cx}{1-x}$$

$$A(1-x) + Bx = 1 \Rightarrow A=1, B=1$$

$$\ln \frac{y}{y+1} = \ln \frac{cx}{1-x} \Rightarrow \frac{y}{y+1} = \frac{cx}{1-x} \Rightarrow \frac{1-x}{cx} = \frac{y+1}{y} = 1 + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1-x}{cx} - 1 = \frac{1-(c+1)x}{cx} \Rightarrow \boxed{y = \frac{cx}{1-(c+1)x}}$$

Solution Curves of  $\frac{1}{x^2-x} + \frac{y'}{y^2+y} = 0$



## 1.3 EDOs homogéneas

### Definición

Se denomina *EDO homogénea* a toda ecuación diferencial de la forma

$$y'(x) = f(x, y)$$

donde  $f(x, y)$  verifica

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad \forall \lambda \geq 0$$

### ■ Ejemplos:

$$y' = \frac{x^2 y + y^3}{x^3 + x y^2}, \quad y' = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{x + 2y}$$

► Resolución:

$$y'(x) = f(x, y)$$

Mediante el cambio de variable

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$y(x) = xu(x), \quad y'(x) = u(x) + xu'(x),$$

↓ (Sustituyendo en la EDO) ↓

$$u(x) + xu'(x) = f(x, xu) = f(1, u) := g(u)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x} \quad \leftarrow \text{EDO en VVSS en } u(x)$$

$$G(u) := \int \frac{du}{g(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + k = \ln|x| + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

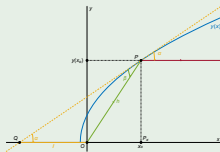
Deshaciendo el cambio de variable se obtiene la solución general.

## 1.3 EDOs homogéneas

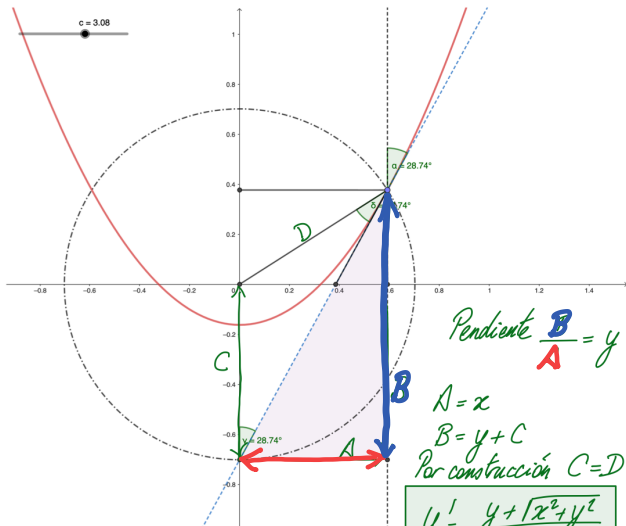
### Example (Problema 3 - Hoja 1A - Problema de óptica)

Empleando coordenadas cartesianas, hállese la forma del espejo tal que los rayos que parten de un punto dado, al reflejarse en él, salen paralelos a una dirección dada.

- **Indicaciones:** Para simplificar los cálculos, elíjase el sistema de coordenadas de tal forma que el punto desde donde se emiten los rayos sea el origen de coordenadas, y la dirección dada sea la del eje  $OX$ . Para plantear la ecuación diferencial que modela el problema, aplíquese el *Principio de reflexión*



**Lo hacemos cambiando  $x$  por  $y$**



Pendiente  $\frac{B}{A} = y'$

$A = x$

$B = y + C$

Por construcción  $C = D = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$y' = \frac{y + \sqrt{y^2 + x^2}}{x}; \text{ es homogénea} \Rightarrow \begin{cases} y = ux \\ y' = u'x + u \end{cases}$$

$$u'x + u = u + \sqrt{1 + u^2}$$

$$u'x = \sqrt{1 + u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln(cx) = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{(1 + \tan^2 \alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} d\alpha = \int \sec \alpha d\alpha =$$

$$\begin{cases} u = \tan \alpha \\ du = (1 + \tan^2 \alpha) d\alpha = \sec^2 \alpha d\alpha \end{cases} \quad = \ln(\sec \alpha + \tan \alpha)$$

$$cx = xcd + \tan d = \sqrt{1+u^2} + u \Rightarrow$$

$$cx = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow cx^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + y \Rightarrow$$

$$cx^2 - y = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow c^2 x^4 - 2cx^2y + y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$c^2 x^4 - 2cx^2y = x^2 \Rightarrow c^2 x^2 - 2cy = 1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{cx^2}{2} - \frac{1}{2c}$$

## 1.3 EDOs homogéneas

### Ejercicios (de Hoja 1B)

- *Problemas 5, 8a) (Problemas de trayectorias oblicuas)*
- *Problema 7 (Problema de trayectoria ortogonal)*
- *Problema 10 (Problema geométrico)*

### Ejercicio complementario

*Hállese la solución general de la ecuación diferencial*

$$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

*Ver* →

$$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

Es la del ejercicio del espejo:

$$x \frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

## 1.4 EDOs lineales de primer orden

### Definición

Se denomina *EDO lineal de primer orden*, a toda ecuación diferencial de la forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \quad x \in I$$

- EDO *lineal homogénea* si  $b(x) \equiv 0$
- EDO *lineal completa* si  $b(x) \neq 0$ .

### ■ Ejemplo:

$$y' - \frac{1}{x+1}y = \frac{3x^4 + 4x^3}{x+1}, \quad x > -1$$

Busca:  
 $\mu(x)$  tal que (factor integrante)

$$\underbrace{\mu(x) y'(x) + a(x) \mu(x) y(x)}_{(\mu \cdot y)'} = b(x) \mu(x)$$

$$\mu'(x) = a(x) \mu(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = a(x) dx$$

$$\Rightarrow \ln \mu = \int a(x) dx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int a(x) dx}$$

$$\mu \cdot y = \int b(x) \mu(x) dx + C \Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int b(x) \mu(x) dx + C \right)$$

## 1.4 EDOs lineales de primer orden

### ► Resolución:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

Multiplicando ambos términos por  $e^{(\int a(x) dx)}$  queda

$$e^{(\int a(x) dx)} y'(x) + a(x)y(x)e^{(\int a(x) dx)} = b(x)e^{(\int a(x) dx)}$$

que puede ser expresado en la forma

$$\frac{d}{dx} \left( e^{(\int a(x) dx)} y(x) \right) = b(x)e^{(\int a(x) dx)}$$

con lo que

$$e^{(\int a(x) dx)} y(x) = \int b(x)e^{(\int a(x) dx)} dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## 1.4 EDOs lineales de primer orden

Despejando  $y(x)$  en la anterior expresión, se llega a que la solución general de

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

viene dada por

$$y(x) = e^{-\left(\int a(x) dx\right)} \left( C + \int b(x) e^{\left(\int a(x) dx\right)} dx \right), \quad C \in \mathbb{R}$$

★ **Nota:** Obsérvese que cuando la EDO es lineal homogénea

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0,$$

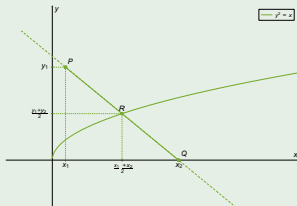
es decir,  $b(x) = 0$ , la solución general de la ecuación viene dada por

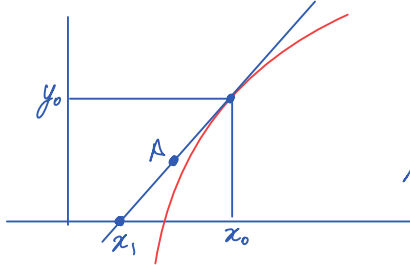
$$y(x) = C e^{-\left(\int a(x) dx\right)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

## 1.4 EDOs lineales de primer orden

### Example (Problema 5 - Hoja 1A - Problema geométrico)

Hállese la curva, que pasando por el punto  $(1, 2)$ , verifica que los puntos medios de los segmentos de sus rectas tangentes comprendidos entre el punto de contacto de la recta tangente con la curva y el punto de corte de la recta tangente con el eje  $OX$ , se encuentran sobre la parábola  $y^2 = x$ .





$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{y'_0}$$

$$A = \left( \frac{x_1 + x_0}{2}, \frac{y_0 + 0}{2} \right)$$

Para que A esteja em  $x = y^2$ :

$$\frac{x_1 + x_0}{2} = \frac{y_0^2}{4}$$

$$2x_1 + 2x_0 = y_0^2 \Leftrightarrow 4x_0 - \frac{2y_0}{y'_0} = y_0^2, \quad 4x - \frac{2y}{y'} = y^2$$

$$\text{Então é } 4xy' - 2y = y^2 y' \Rightarrow (4x - y^2)y' = 2y \Rightarrow y' = \frac{2y}{4x - y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4x - y^2}{2y} = 2\frac{1}{y}x - \frac{y}{2} \quad \text{linear para } x(y)$$

## 1.4 EDOs lineales de primer orden

### Ejercicio complementario

*Hállese la solución general de la ecuación diferencial*

$$y' - \frac{1}{x+1}y = \frac{3x^4 + 4x^3}{x+1}, \quad x > -1.$$

$$y' - \frac{1}{x+1}y = \frac{3x^4 + 4x^3}{x+1}, \quad x > -1.$$

Busco  $\mu(x)$  con  $\mu y' - \frac{1}{x+1} \mu y = (\mu y)'$ , luego

$$\mu' = -\frac{1}{x+1} \cdot \mu \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = -\int \frac{1}{x+1} dx \Rightarrow \ln \mu = \ln \frac{1}{x+1} \Rightarrow$$

$\mu = \frac{1}{x+1}$ ; Entonces la EDO inicial es:

$$\left( \frac{y}{x+1} \right)' = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{y}{x+1} = \int \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^2} + C$$

$$y = C(x+1) + (x+1) \int \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^2} dx$$

sol. general

particular

$$\int \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} dx = \int (3x^2 - 2x + 1) dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \textcircled{A}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{A} \quad 3x^4 + 4x^3 \\ 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^3 - 3x^2 \\ -2x^3 - 4x^2 - 2x \\ \hline x^2 + 2x \\ x^2 + 2x + 1 \\ \hline \textcircled{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ \hline \textcircled{3x^2 - 2x + 1} \end{array}$$

**+ 1**  
**(faltaba)**

$$\textcircled{A} = x^3 - x^2 + x + \frac{1}{x+1} \Rightarrow y = C(x+1) + (x^3 - x^2 + x) / (x+1)$$

$$y = C(x+1) + (x^3 - x^2 + x)(x+1) + 1$$

de  $\frac{1}{x+1}$

$$y = C(x+1) + x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + 1$$

$$y = C(x+1) + x^4 + (x+1) \Rightarrow y = C(x+1) + x^4$$

remembrade

Alternativa:  $(3x^4 + 4x^3)' = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$

Hacer  $\int \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} dx$  por partes con esto.