



COMILLAS

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

ICAI

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Tema 1: ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.
GITI, GITI+ADE, GITT, GITT+Analytics
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Objetivos a cubrir

Una vez finalizado el tema, el alumno:

- Conocerá la terminología y conceptos básicos de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Dominará algunas de las técnicas elementales de resolución exacta de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Conocerá algunas de las muchas aplicaciones en el campo de la física, la química, la geometría, la ingeniería, etc. de las ecuaciones diferenciales.
- Se habrá iniciado en el modelado y resolución de problemas de física e ingeniería en términos de ecuaciones diferenciales.

Los contenidos del tema pueden ser seguidos por:

- Transparencias de clase
- *Ecuaciones Diferenciales y en Derivadas Parciales (Apuntes del curso en el Portal de Recursos)* Cano Casanova, S. y Jiménez Casas, A.
- Hoja 1A y Hoja 1B de problemas de la asignatura
- *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría y Problemas. Métodos exactos, métodos numéricos, estudio cualitativo.* de la Villa Cuenca, A., López de la Rica, A. y otros autores. CLAGSA, 2006.

Índice de contenidos (I)

- Introducción a EDOs de primer orden
- EDOs en variables separadas
- EDOs homogéneas
- EDOs lineales de primer orden
- EDOs reducibles a lineales: EDOs de Bernoulli
- EDOs exactas
- Comentarios generales de resolución de EDOs (orden 1)
- EDO asociada a una familia uniparamétrica de curvas del plano
- Problemas de trayectorias

Aplicaciones de las EDOs en:

- ✓ Problemas de trayectorias
- ✓ Problemas de movimientos
- ✓ Problemas demográficos
- ✓ Problemas de persecución o depredador-presa
- ✓ Problemas geométricos
- ✓ Problemas de radiación
- ✓ Problemas de óptica
- ✓ Problemas de transferencia de calor

1.1 Introducción a Ecuaciones Diferenciales de primer orden

■ Definiciones básicas

Definición

Se denomina *Ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden* a toda ecuación de la forma

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in \mathcal{I}$$

donde

- $\mathcal{I}$ es el intervalo de trabajo
- $x \in \mathcal{I}$ es la variable independiente
- $y(x)$ es la función incógnita

Generalmente vendrá expresada en la forma $y' = f(x, y)$

■ Ejemplos:

$$(x^2 + 1)y' + y^2 - x^3 = 0, \quad y' = \frac{xy^3 + 1}{y - x}$$

1.1 Introducción a Ecuaciones Diferenciales de primer orden

■ Definiciones básicas

Definición

Dada la ecuación diferencial

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in \mathcal{I}$$

se denomina:

- *Orden* de la EDO, al mayor grado de derivación de la función incógnita $y(x)$. En este caso es 1.
- *Solución particular* de la EDO, a cualquier curva del plano que verifique la EDO en todos sus puntos.
- *Solución general* de la EDO, al conjunto de todas las curvas del plano que verifiquen la EDO en todos sus puntos.

1.1 Introducción a Ecuaciones Diferenciales de primer orden

■ Expresión de la solución general de una EDO de primer orden

La solución general de una EDO de primer orden será una familia uniparamétrica de curvas del plano que puede venir expresada de las siguientes formas:

- Forma explícita:

$$y = g(x, C), \quad x \in \mathcal{I}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{ó}$$

$$x = h(y, C), \quad y \in \mathcal{J}, \quad C \in \mathbb{R}$$

- Forma implícita:

$$G(x, y, C) = 0, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

■ Ejemplos:

$$y(x) = \pm \sqrt{C - x^2}, \quad x^2 + y^2 = C, \quad C > 0$$

1.1 Introducción a Ecuaciones Diferenciales de primer orden

■ Problemas de valor inicial

Definición

Se denomina *Problema de Valor Inicial* (PVI) de primer orden a todo problema de la forma

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0, & t \in (t_1, t_2) & \Leftarrow \text{EDO de orden 1} \\ y(t_0) = y_0 & & \Leftarrow \text{Condición inicial} \end{cases}$$

donde $t_0 \in [t_1, t_2]$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ son valores predeterminados por la naturaleza del problema a resolver.

Generamente el PVI vendrá expresado en la forma

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in (t_1, t_2) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

1.1 Introducción a Ecuaciones Diferenciales de primer orden

■ Problemas de valor inicial

Existencia y unicidad de soluciones de PVI

Sea el problema de valor inicial

$$(PVI) \equiv \begin{cases} y' = f(t, y), & t \in (t_0, t_1) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si $f(t, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ son funciones continuas en un entorno $\mathcal{U}$ del punto $(t, y) = (t_0, y_0)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que PVI tiene una única solución en el intervalo $[t_0, t_0 + \delta)$, es decir, existe una única función $\varphi(t)$ definida en $[t_0, t_0 + \delta)$ tal que

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), & t \in (t_0, t_0 + \delta) \\ \varphi(t_0) = y_0 \end{cases}$$

1.1 Introducción a Ecuaciones Diferenciales de primer orden

■ Problemas de valor inicial

Example

- Problemas 1, 2, 4, 5 y 8 de la Hoja 1A.

Ejercicio

- *Problemas 3, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18 y 19 de la Hoja 1B.*

1.2 EDOs en variables separadas

Definición

Se denomina *EDO en variables separadas (VVSS)* a toda ecuación diferencial que pueda ser expresada en la forma

$$g(y) dy = f(x) dx$$

► Resolución:

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Definiendo

$$G(y) := \int g(y) dy, \quad F(x) := \int f(x) dx$$

la solución general de la EDO queda expresada en la forma:

$$G(y) = F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

1.2 EDOs en variables separadas

Example (Problema 1 - Hoja 1A)

Una persona parte del origen moviéndose en la dirección del eje OX . Arrastra una carga atada a una cuerda de longitud 1 inicialmente situada en el punto $(0, 1)$. Hállese la curva (denominada tractriz) que describe la carga en su recorrido, teniendo en cuenta que en cada instante de tiempo la cuerda es tangente a la trayectoria. Véase figura adjunta.

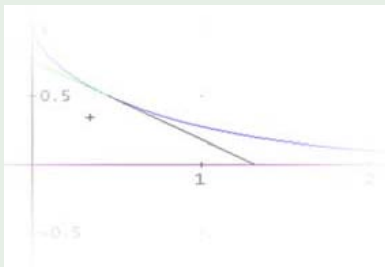
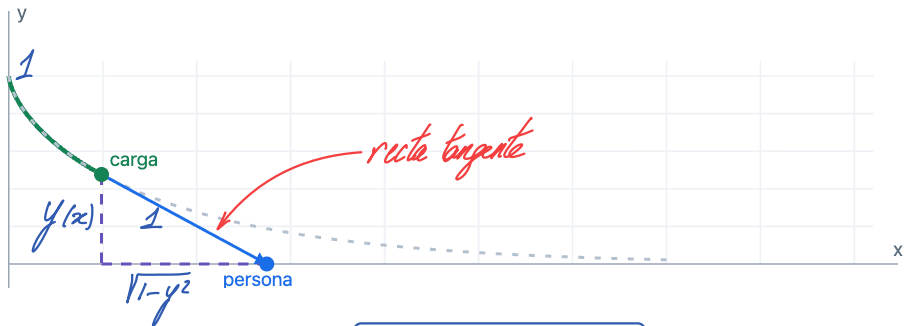


Figure: Tractriz



Pendiente de la tangente: $y'(x) = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ con $0 < y \leq 1$

Ecuación separable: $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy = -dx$

$$\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy = \int -dx \Rightarrow -x + C = \int \frac{\cos u}{\sin u} \cdot \cos u du$$

$$\begin{cases} y = \sin u & \text{Com } 0 < u < \frac{\pi}{2} \\ dy = \cos u du & \text{para que} \\ & \sin u > 0 \end{cases}$$

$$C - x = \int \frac{1 - \sin^2 u}{\sin u} du = \int \left(\underbrace{\frac{1}{\sin u}}_{\int \csc u du} - \underbrace{\sin u}_{\text{imediata}} \right) du$$

Si no recuerdas la primitiva de la cosecante,
usa esto:

$$\left. \begin{aligned} w &= \tan\left(\frac{u}{2}\right) \\ \cos u &= \frac{1-w^2}{1+w^2} \\ \sin u &= \frac{2w}{1+w^2} \\ du &= \frac{dw}{1+w^2} \\ \tan\left(\frac{u}{2}\right) &= \frac{1-\cos u}{\sin u} \end{aligned} \right\}$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\frac{dw}{1+w^2}}{\frac{2w}{1+w^2}} = \int \frac{dw}{w} = \ln w = \ln \tan\left(\frac{u}{2}\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} C-x &= \ln \tan\left(\frac{u}{2}\right) + \cos u = \\ &= \ln(1-\cos u) - \ln \sin u + \cos u \end{aligned}$$

Y volviendo a la y :

$$C - x = \ln(1 - \sqrt{1 - y^2}) - \ln y + \sqrt{1 - y^2}$$

Como $y=1$ cuando $x=0 \Rightarrow$

$$C = \ln(1) - \ln(1) + \sqrt{1 - 1^2} \Rightarrow C=0$$

Así pues: $x = \ln y - \ln(1 - \sqrt{1 - y^2}) - \sqrt{1 - y^2}$

Finalmente:

$$x = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{1 - y^2}$$